فصل

۲۵

میدان‌های مغناطیسی ناشی از جریان‌ها

بخش ۲۵-۲ محاسبه‌ی میدان مغناطیسی ناشی از جریان الکتریکی

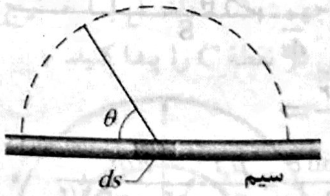
•۱- نقشه برداری در فاصلهٔ ۶/۱m زیر خط فشار قوی که در آن جریان ۱۰۰A برقرار است یک قطب نمای مغناطیسی را به کار می‌برد. (الف) میدان مغناطیسی ناشی از خط فشار قوی در محل قطب‌نما چقدر است؟ (ب) آیا این میدان به طور جدی روی جهت‌گیری قطب‌نما اثر می‌گذارد؟ مؤلفهٔ افقی میدان مغناطیسی زمین در این محل ۲۰μT است.

حل: (الف)

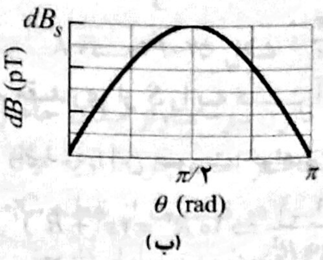
$$B=\frac{\mu_\circ i}{۲\pi r}=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۱۰۰)}{(۲\pi)(۶/۱)}=۳/۳\times۱۰^{-۶}\ \text{T}=۳/۳\mu\text{T}$$

(ب) این حدود یک ششم بزرگی میدان مغناطیسی زمین است لذا می‌تواند بر آن اثرگذار باشد.

•۲- شکل ۲۵-۳۴ الف عنصری به طول $d_s=۱/۰۰\ \mu$m را در یک سیم مستقیم خیلی دراز و حامل جریان نشان می‌دهد. جریان در این عنصر میدان مغناطیسی دیفرانسیلی $d\vec{B}$ را در نقطه‌های فضای اطراف برقرار می‌کند. شکل ۲۵-۳۶ ب بزرگی میدان dB را در نقطه‌هایی به فاصلهٔ ۲/۵cm از این عنصر، برحسب تابعی از زاویهٔ میان سیم و خط مستقیم متصل به آن نقطه نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $dB_s=۶۰/۰$pT مشخص شده است. بزرگی میدان مغناطیسی برقرار شده توسط کل سیم در فاصلهٔ عمودی ۲/۵cm از سیم چقدر است؟



(الف)



(ب)

شکل ۲۵-۳۴ مسئلهٔ ۲

حل: با توجه به نمودار dB بیشینه به ازای $\theta=\frac{\pi}{2}$ حاصل می‌شود و مقدار آن برابر $6\times10^{-12}\ \mathrm{T}$ است لذا از رابطه زیر جریان را به دست می‌آوریم.

$$dB_{max}=\frac{\mu_0 i ds\sin 90}{4\pi R^2}\Rightarrow i=\frac{(4\pi R^2)(dB_{max})}{\mu_0 ds}$$

که با قرار دادن $ds=1\times10^{-6}\ \mathrm{m}$ و $R=0/025\ \mathrm{m}$ جریان به دست می‌آید $i=0/375\mathrm{A}$.

حال می‌توان میدان مغناطیسی ایجاد شده توسط کل سیم در نقطه‌ای به فاصله $2/5\mathrm{cm}$ را به دست آورد.

$$B=\frac{\mu_0 i}{2\pi r}=\frac{(4\pi\times10^{-7})(0/375)}{(2\pi)(0/025)}=3\times10^{-6}\ \mathrm{T}=3\mu\mathrm{T}$$

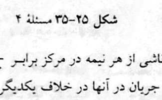
●۳- SSM در نقطهٔ خاصی از کشور فیلیپین میدان مغناطیسی زمین با بزرگی $39\mu\mathrm{T}$ افقی و به طرف شمال است. فرض کنید دقیقاً $8/0\mathrm{cm}$ بالای یک سیم مستقیم دراز افقی که حامل جریان ثابتی است میدان خالص صفر است. (الف) بزرگی و (ب) جهت جریان چیست؟

حل: (الف)

$$B=\frac{\mu_0 i}{2\mu r}\Rightarrow 39\times10^{-6}=\frac{(4\pi\times10^{-7})i}{(2\pi)(0/08)}\Rightarrow i=15/6\mathrm{A}$$

(ب) جهت جریان باید از غرب به شرق باشد تا میدانی در جهت جنوب در نقاط پایین آن ایجاد شود.

●۴- یک رسانای مستقیم که حامل جریان $i=5/0\mathrm{A}$ است مانند شکل ۲۵-۳۵ به دو کمان نیم‌دایره‌ای یکسان تقسیم شده است. میدان مغناطیسی در مرکز C حلقهٔ دایره‌ای حاصل چقدر است؟



شکل ۲۵-۳۵ مسئلهٔ ۴

حل: میدان ناشی از هر نیمه در مرکز برابر $B=\frac{\mu_0 i}{4\pi r}$ است و چون جهت جریان در آنها در خلاف یکدیگر است اثر هم را خنثی می‌کنند لذا میدان مغناطیسی در مرکز حلقه صفر است.

●۵- در شکل ۲۵-۳۶، جریان $i=10\ \mathrm{A}$ در رسانای دراز سنجاق موی سر که با خم کردن آن به صورت نیم‌دایره‌ای به شعاع $R=5/0\mathrm{mm}$ درآمده برقرار است. نقطهٔ b در میان بخش‌های مستقیم قرار دارد و از نیم‌دایره چنان دور است که هر بخش مستقیم را می‌توان تقریباً یک سیم به طول بینهایت در نظر گرفت. (الف) بزرگی و (ب) جهت (به طرف داخل یا به طرف خارج صفحه) $\vec{B}$ در a و (پ) بزرگی و (ت) جهت $\vec{B}$ در b را پیدا کنید.

شکل ۲۵-۳۶ مسئلهٔ ۵

حل: (الف) و **(ب)** میدان در نقطه a برآیند سه میدان است. دو سیم نیم نامتناهی $\left(B=\frac{\mu_0 i}{4\pi r}\right)$ موازی و یک سیم نیم دایره $\left(B=\frac{\mu_0 i}{4r}\right)$ و با توجه به جهت جریان خواهیم داشت

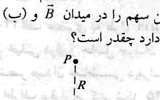
$$\vec{B}=\left[2\left(\frac{\mu_0 i}{4\pi R}\right)+\frac{\mu_0 i}{4R}\right]\hat{k}=\frac{\mu_0 i}{2R}\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\hat{k}$$

$$=\frac{(4\pi\times10^{-7})(10)}{2(0/005)}\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\hat{k}=1/03\times10^{-3}\ \hat{k}\ \mathrm{T}$$

(پ) و **(ت)** چون فاصله بین a و b نسبت به R زیاد است لذا اثر سیم نیم دایره در نقطه b ناچیز بوده و فقط اثر دو سیم نامتناهی $\left(B=\frac{\mu i}{2\pi r}\right)$ را داریم:

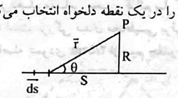
$$\vec{B}=2\left(\frac{\pi_0 i}{2\pi R}\right)\hat{k}=\frac{(4\pi\times10^{-7})(10)}{\pi(0/005)}\hat{k}=8\times10^{-4}\ \hat{k}\ \mathrm{T}$$

●۶- در شکل ۲۵-۳۷، نقطهٔ P در فاصلهٔ عمودی $R=2/00\ \mathrm{cm}$ از یک سیم مستقیم دراز و حامل جریان قرار دارد. میدان مغناطیسی $\vec{B}$ برقرار شده در نقطهٔ P ناشی از همهٔ عنصرهای جریان- طول یکسان $i\,d\vec{s}$ در طول سیم است. فاصلهٔ عنصری که (الف) بیشترین سهم را در میدان $\vec{B}$ و (ب) ۱۰/۰ درصد از بیشترین سهم را دارد چقدر است؟



شکل ۲۵-۳۷ مسئلهٔ ۶

حل: عنصر $\vec{ds}$ را در یک نقطه دلخواه انتخاب می‌کنیم



$$d\vec{B}=\frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{\vec{ds}\times\vec{r}}{r^3}\Rightarrow$$

$$dB=\frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{ds\,r\sin\theta}{r^3}=\frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{R\,ds}{(S^2+R^2)^{3/2}}$$

(الف) عبارت بالا به ازای $S=0$ بیشترین مقدار را دارد.

$$dB_{max}=\frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{ds}{R^2}$$

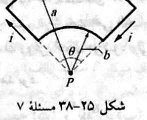
(ب) می‌خواهیم مقداری از S را به دست آوریم که در آن $dB=\frac{1}{10}dB_{max}$ باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{R}{(S^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{10}\frac{1}{R^2}\Rightarrow 10R^3=(s^2+R^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$10^{2/3}R^2=S^2+R^2\Rightarrow S=\sqrt{10^{\frac{2}{3}}-1}R$$

$$=\left(\sqrt{10^{\frac{2}{3}}-1}\right)(2)=3/82\ \mathrm{cm}$$

●۷- GO در شکل ۲۵-۳۸ شعاع‌های دو کمان دایره‌ای عبارت‌اند از $a=13/5\ \mathrm{cm}$ و $b=10/7\mathrm{cm}$. زاویهٔ تحت پوشش دو کمان $74/0°$ است و آنها حامل جریان $i=0/411\mathrm{A}$ هستند. مرکز مشترک آنها نقطهٔ P است. (الف) بزرگی و (ب) جهت (به داخل یا خارج) میدان مغناطیسی خالص در نقطهٔ P را پیدا کنید.



شکل ۲۵-۳۸ مسئلهٔ ۷

حل: (الف) طبق قانون بیو- ساوار میدان مغناطیسی ناشی از بخش‌های مستقیم در نقطهٔ P برابر صفر است چون زاویه بین $\vec{ds}$ و $\vec{r}$ صفر است. برای بخش‌ها خمیده از قانون بیو- ساوار داریم:

$$dB=\frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{ds\sin 90}{r^2}\Rightarrow B=\frac{\mu_0 i}{4\pi r^2}\int_0^{\theta} r\,d\theta=\frac{\mu_0 i\theta}{4\pi r}$$

از قاعده دست راست برای کمان با شعاع a میدان در جهت $-\hat{k}$(به سمت داخل) و برای کمان با شعاع a در جهت $\hat{k}$ (به سمت خارج) است لذا میدان در نقطه P چنین است.

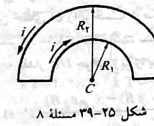
$$\vec{B}_P=\frac{\mu_0 i\theta}{4\pi}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\hat{k}$$

که با قرار دادن مقادیر عددی خواهیم داشت:

$$\vec{B}_P=1/02\times10^{-7}\ \hat{k}\ \mathrm{T}$$

(ب) به سمت خارج صفحه است.

●۸- در شکل ۲۵-۳۹ شعاع دو کمان نیم‌دایره‌ای عبارت‌اند از $R_1=3/15\mathrm{cm}$ و $R_2=7/80\ \mathrm{cm}$. این دو نیم‌دایره در نقطهٔ C هم مرکزند و در آنها جریان $i=0/281\ \mathrm{A}$ برقرار است. (الف) بزرگی و (ب) جهت (به داخل یا خارج صفحه) میدان مغناطیسی خالص در نقطهٔ C را پیدا کنید.



شکل ۲۵-۳۹ مسئلهٔ ۸

حل: (الف) طبق قانون بیو- ساوار میدان حاصل از بخش‌های مستقیم در نقطهٔ C صفر است چون زاویهٔ میان $d\vec{S}$ و $\vec{r}$ صفر است یا امتداد این دو قسمت از نقطه C می‌گذرد. برای بخش‌های خمیده از قانون بیو- ساوار داریم:

$$dB=\frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{ds\sin 90}{r^2}\Rightarrow B=\frac{\mu_0 i}{4\pi r^2}\int_0^{\pi} r\,d\theta$$

$$B=\frac{\mu_0 i}{4\pi r}(\pi)=\frac{\mu_0 i}{4r}$$

طبق قاعده دست راست برای کمان با شعاع R_2 میدان در جهت $+\hat{k}$ (به سمت خارج صفحه) و میدان حاصل از کمان با شعاع R_1 در جهت $-\hat{k}$(به سمت داخل صفحه) است لذا داریم

$$\vec{B}_C=\frac{\mu_0 i}{4}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\hat{k}$$

$$=\frac{(4\pi\times10^{-7})(0/281)}{4}\left(\frac{1}{0/078}-\frac{1}{0/0315}\right)\hat{k}$$

$$=-1/67\times10^{-6}\ \hat{k}\,\mathrm{T}$$

(ب) به سمت داخل صفحه است.

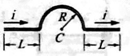
●۹- SSM دو سیم مستقیم دراز به فاصلهٔ $8/0\mathrm{cm}$ از یکدیگر به طور موازی قرار دارند. این دو سیم جریان‌های مساوی را به گونه‌ای حمل می‌کنند که میدان مغناطیسی در نقطهٔ وسط فاصلهٔ آنها $300\mu\mathrm{T}$ است. (الف) آیا جریان‌ها در یک جهت‌اند یا مخالف یکدیگرند؟ (ب) جریان مورد نیاز چقدر است؟

حل: (الف) جهت جریان در سیم‌ها باید در خلاف جهت هم باشد تا میدان آنها در A همسو شده و با هم جمع می‌شوند.

(ب)
$$B=\frac{\mu_0 i}{2\pi(d/2)}+\frac{\mu_0 i}{2\pi(d/2)}$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده داریم $i=30\mathrm{A}$.

●۱۰-در شکل ۲۵-۴۰ سیمی نیم‌دایره‌ای به شعاع $R=9/25\mathrm{cm}$ و دو قسمت راست (شعاعی) هر یک به طول $L=13/1\mathrm{cm}$ نشان داده است. این سیم حامل جریان $i=34/8\mathrm{mA}$ است. (الف) بزرگی و (ب) جهت (به داخل یا خارج از صفحه) میدان مغناطیسی خالص را در مرکز نیمدایره به مرکز C پیدا کنید.



شکل ۲۵-۴۰ مسئلهٔ ۱۰

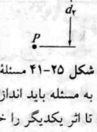
حل: (الف) سیم از سه تکه تشکیل شده است، دو تکه سیم راست و یک تکه سیم خمیده. دو تکه سیم راست در نقطه C میدانی ایجاد نمی‌کنند چون امتداد آنها از این نقطه می‌گذرد. و میدان حاصل از سیم خمیده نیز از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$B=\frac{\mu_0 i\theta}{4\pi r}=\frac{\mu_0 i}{4\pi R}(\pi)=\frac{\mu_0 i}{4R}$$

$$B=\frac{(4\pi\times10^{-7})(0/0348)}{4(0/0926)}=1/18\times10^{-7}\ \mathrm{T}$$

(ب) از قاعدهٔ دست راست و با توجه به جهت جریان میدان به سمت داخل صفحه است.

•۱۱- در شکل ۲۵-۴۱، دو سیم مستقیم دراز بر صفحهٔ کاغذ عمودند و فاصلهٔ آنها $d_۱$=۰/۷۵cm است. سیم ۱ حامل جریان ۶/۵ A به داخل صفحه است. اگر میدان مغناطیسی خالص ناشی از دو جریان در نقطهٔ P واقع در فاصلهٔ $d_۲$=۱/۵۰ cm از سیم ۲ صفر باشد (الف) بزرگی و (ب) جهت (به طرف داخل یا به طرف خارج صفحه) جریان در سیم ۲ را پیدا کنید.



شکل ۲۵-۴۱ مسئلهٔ ۱۱

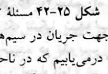
حل: (الف) با توجه به مسئله باید اندازه دو میدان یکسان و در جهت مخالف باشند تا اثر یکدیگر را خنثی کنند، لذا خواهیم داشت

$$B_۱ = B_۲ \Rightarrow \frac{\mu_۰ i_۱}{۲\pi(d_۱+d_۲)} = \frac{\mu_۰ i_۲}{۲\pi d_۲}$$

$$\frac{i_۱}{d_۱+d_۲} = \frac{i_۲}{d_۲} \Rightarrow \frac{۶/۵}{۰/۷۵+۱/۵} = \frac{i_۲}{۱/۵} \Rightarrow i_۲ = ۴/۳\text{A}$$

(ب) جهت جریان باید در خلاف جهت جریان $i_۱$ باشد تا اثر میدان سیم ۱ را خنثی کنند.

•۱۲- در شکل ۲۵-۴۲، دو سیم مستقیم دراز به فاصلهٔ d=۱۶/۰ cm از یکدیگر حامل جریان‌های $i_۱$=۳/۶۱ mA و $i_۲$=۳/۰۰$i_۱$ به طرف خارج صفحه‌اند. (الف) در چه نقطه‌ای روی محور x میدان مغناطیسی خالص ناشی از جریان‌ها صفر است؟ (ب) اگر دو جریان دو برابر شوند، آیا نقطهٔ صفر میدان مغناطیسی به طرف سیم ۱ جابه‌جا می‌شود یا به طرف سیم ۲، یا بدون تغییر می‌ماند؟



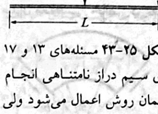
شکل ۲۵-۴۲ مسئلهٔ ۱۲

حل: (الف) چون جهت جریان در سیم‌ها همسو است لذا از قاعده دست راست درمی‌یابیم که در ناحیه بین دو سیم امکان خنثی شدن میدان‌ها وجود دارد. اگر نقطه مورد نظر را به فاصله r از سیم حامل جریان $i_۱$ در نظر بگیریم فاصلهٔ آن از سیم حامل جریان $i_۲$ برابر $d-r$ بوده و خواهیم داشت

$$\frac{\mu_۰ i}{۲\pi r} = \frac{\mu_۰(۳i)}{۲\pi(d-r)} \Rightarrow r = \frac{d}{۴} = \frac{۱۶}{۴} = ۴\text{cm}$$

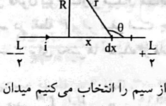
(ب) اگر جریان‌ها دو برابر شوند این نقطه تغییر نمی‌کند.

••۱۳- در شکل ۲۵-۴۳، نقطهٔ $P_۱$ در فاصلهٔ R=۱۳/۱ cm روی عمود منصف سیم مستقیمی به طول L=۱۸/۰ cm که حامل جریان i=۵۸/۲ mA است قرار دارد. (توجه کنید که سیم *دراز نیست.*) بزرگی میدان مغناطیسی ناشی از i در $P_۱$ چقدر است؟



شکل ۲۵-۴۳ مسئله‌های ۱۳ و ۱۷

حل: حلی که برای سیم دراز نامتناهی انجام شد را در نظر بگیرید در اینجا همان روش اعمال می‌شود ولی فقط کران آن از $-\frac{L}{۲}$ تا $+\frac{L}{۲}$ خواهد بود.



یک عنصر dx از سیم را انتخاب می‌کنیم میدان حاصل از آن در $P_۱$ به سمت خارج صفحه است. برای تمام عنصرهای dx جهت dB به سمت خارج صفحه است. بزرگی dB برابر است:

$$dB = \frac{\mu_۰ i}{۴\pi}\frac{r\,dx\sin\theta}{r^۳} = \frac{\mu_۰ i}{۴\pi}\frac{R\,dx}{(x^۲+R^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$B = \frac{\mu_۰ iR}{۴\pi}\int_{-\frac{L}{۲}}^{\frac{L}{۲}}\frac{dx}{(x^۲+R^۲)^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{\mu_۰ iR}{۴\pi}\frac{۱}{R^۲}\frac{x}{\sqrt{x^۲+R^۲}}\Bigg|_{-\frac{L}{۲}}^{\frac{L}{۲}}$$

$$B = \frac{\mu_۰ iL}{۲\pi R\sqrt{L^۲+۴R^۲}}$$

با قرار دادن مقادیر عددی خواهیم داشت $B = ۵/۰۳\times۱۰^{-۸}$ T.

••۱۴- معادلهٔ ۲۵-۴ بزرگی B میدان مغناطیسی برقرار شده توسط جریانی در یک سیم مستقیم بینهایت دراز را در نقطهٔ P در فاصلهٔ عمودی R از سیم به دست می‌دهد. فرض کنید که نقطهٔ P در واقع در فاصلهٔ عمودی R از نقطهٔ وسط سیمی به طول L متناهی قرار دارد. با استفاده از معادلهٔ ۲۵-۴، B را محاسبه و سپس خطای آن را برحسب درصد بیان کنید. اگر خطای نسبی کمتر از ۱/۰۰ درصد باشد، نسبت L/R چقدر تغییر می‌کند؟ یعنی چه مقدار L/R جواب زیر را به دست می‌دهد

$$\frac{(B \text{ واقعی}) - (B \text{ از معادلهٔ ۲۵-۴})}{(B \text{ واقعی})}(\%۱۰۰) = \%۱/۰۰$$

حل: میدان مغناطیسی یک سیم دراز نامتناهی در فاصله R از آن برابر است با $B = \mu_۰ i/۲\pi R$ و برای یک سیم با طول L، همان‌طور که در مسئله ۱۷ دیدیم، برابر است با:

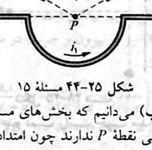
$$B = \frac{\mu_۰ i}{۲\pi R}\frac{L}{\sqrt{L^۲+۴R^۲}}$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{\frac{\mu_۰ i}{۲\pi R} - \frac{\mu_۰ i}{۲\pi R}\frac{L}{\sqrt{L^۲+۴R^۲}}}{\frac{\mu_۰ i}{۲\pi R}\frac{L}{\sqrt{L^۲+۴R^۲}}} = \frac{۱-\frac{L}{\sqrt{L^۲+۴R^۲}}}{\frac{L}{\sqrt{L^۲+۴R^۲}}} = ۰/۰۱$$

$$۱-\frac{L}{\sqrt{L^۲+۴R^۲}} = (۰/۰۱)\frac{L}{\sqrt{L^۲+۴R^۲}} \Rightarrow \frac{L}{R} = ۱۴$$

••۱۵- شکل ۲۵-۴۴ دو قطعه جریان را نشان می‌دهد. قطعهٔ پایینی حامل جریان $i_۱$=۰/۴۰ A و شامل کمان دایره‌ای با شعاع ۵/۰cm و زاویهٔ °۱۸۰ و نقطهٔ مرکزی P است. قطعه بالایی حامل جریان $i_۲$=۲$i_۱$ و شامل کمان دایره‌ای به شعاع ۴/۰ cm، زاویه °۱۲۰ و همان مرکز P است. (الف) بزرگی و (ب) جهت میدان مغناطیسی خالص $\vec{B}$ را برای جهت‌های نشان داده شدهٔ جریان پیدا کنید. (پ) بزرگی و (ت) جهت $\vec{B}$ در صورت معکوس شدن جهت جریان را پیدا کنید.



شکل ۲۵-۴۴ مسئلهٔ ۱۵

حل: (الف) و (ب) می‌دانیم که بخش‌های مستقیم مدار سهمی در میدان مغناطیسی نقطهٔ P ندارند چون امتداد آنها از نقطه P می‌گذرد و $d\vec{s}\times\vec{r}$ برای آنها صفر است. میدان مغناطیسی در نقطه P فقط ناشی از دو کمان بالایی و پایینی است. بزرگی میدان حاصل از کمان در مرکز آن از رابطه $\mu_۰ i\theta/۴\pi R$ به دست می‌آید. طبق قاعدهٔ دست راست دیده می‌شود که جهت میدان حاصل از کمان پایینی به سمت خارج از صفحه، $+\hat{k}$، و کمان بالایی به سمت داخل صفحه، $-\hat{k}$ است. در نتیجه میدان مغناطیسی خالص $\vec{B}$ در نقطهٔ P برابر است با:

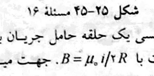
$$\vec{B} = B_۱\hat{k} - B_۲\hat{k} = \frac{\mu_۰ i_۱\pi}{۴\pi R_۱}\hat{k} - \frac{\mu_۰ i_۲\left(۲\frac{\pi}{۳}\right)}{۴\pi R_۲} = ۲/۵۱^{-۶}\hat{k}\,\text{T} - ۴/۲۱^{-۶}\hat{k}\,\text{T}$$

$$\vec{B} = -۱/۷\times۱۰^{-۶}\,\hat{k}\,\text{T}$$

(پ) (ت) اگر جهت جریان $i_۱$ عوض شود، در این صورت جهت میدان حاصل از آن به سمت داخل صفحه خواهد بود یعنی $\vec{B}_۱ = -B\hat{k}$ در نتیجه داریم

$$\vec{B} = -۲/۵\times۱۰^{-۶}\,\hat{k}\,\text{T} - ۴/۲\times۱۰^{-۶}\,\hat{k}\,\text{T} = -۶/۷۱^{-۶}\hat{k}\,\text{T}$$

••۱۶- GO در شکل ۲۵-۴۵، دو حلقهٔ سیمی دایره‌ای هم مرکز حامل جریان در یک جهت‌اند و در یک صفحه قرار دارند. شعاع حلقهٔ ۱ برابر ۱/۵۰ cm و جریان آن ۴/۰۰mA است. شعاع حلقه ۲ برابر ۲/۵۰cm و حامل جریان ۶/۰۰mA است. حلقهٔ ۲ را حول قطری می‌چرخانیم و در همان حال میدان مغناطیسی خالص $\vec{B}$ برقرار شده توسط دو حلقه را در مرکز مشترک آنها اندازه می‌گیریم. برای اینکه بزرگی میدان خالص ۱۰۰nT باشد، حلقهٔ ۲ چقدر باید بچرخد؟



شکل ۲۵-۴۵ مسئلهٔ ۱۶

حل: میدان مغناطیسی یک حلقه حامل جریان به شعاع R در مرکز آن برابر است با $B = \mu_۰ i/۲R$. جهت میدان هر سطح حلقه عمود و از قاعده دست راست پیروی می‌کند.

$$B_۱ = \frac{\mu_۰ i}{۲R_۱} = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۴\times۱۰^{-۳})}{۲(۱/۵\times۱۰^{-۲})} = ۱/۶۷\times۱۰^{-۷}\ \text{T}$$

$$B_۲ = \frac{\mu_۰ i}{۲R_۲} = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۶\times۱۰^{-۳})}{۲(۲/۵\times۱۰^{-۲})} = ۱/۵۱\times۱۰^{-۷}\ \text{T}$$

اگر حلقه (۲) به اندازه θ بچرخد بنابر قانون کسینوس‌ها خواهیم داشت.

$$B^۲ = B_۱^۲ + B_۲^۲ + ۲B_۱B_۲\cos\theta$$

که با قرار دادن مقادیر معلوم زاویه θ برابر با $۱۴۳/۸^{\circ}$ به دست می‌آید.

••۱۷- SSM در شکل ۲۵-۴۳، نقطهٔ $P_۲$ در فاصلهٔ عمودی R=۲۵/۱ cm از یک انتهای سیم مستقیم به طول L=۱۳/۶ cm و حامل جریان i=۰/۶۹۳A قرار دارد. (توجه کنید که سیم *دراز نیست.*) بزرگی میدان مغناطیسی در $P_۲$ چقدر است؟

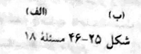
حل: با توجه به مسئله ۱۷ داریم

$$dB = \frac{\mu_۰ i}{۴\pi}\frac{R\,dx}{(x^۲+R^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$B = \frac{\mu_۰ iR}{۴\pi}\int_{-L}^{۰}\frac{dx}{(x^۲+R^۲)^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{\mu_۰ i}{۴\pi R}\frac{L}{\sqrt{L^۲+R^۲}}$$

که با قرار دادن مقادیر عددی داریم: $B = ۱/۳۲\times۱۰^{-۷}$ T.

••۱۸- جریانی در یک حلقه سیم شامل نیم‌دایره‌ای به شعاع ۴۰/۰۰cm و نیم‌دایره‌ای کوچکتر و هم مرکز و دو سیم مستقیم شعاعی که همگی در یک صفحه قرار دارند برقرار است. شکل ۲۵-۴۶ الف این آرایش را نشان می‌دهد که در مقیاس نیست. بزرگی میدان مغناطیسی ایجاد شده در مرکز انحنا ۴۷/۲۵ µT است. سپس نیمدایرهٔ کوچک به طرف دیگر برگردانده (چرخانده) می‌شود تا دوباره مجموعه در یک صفحه قرار گیرد، (شکل ۲۵-۴۶ ب). میدان مغناطیسی ایجاد شده در (همان) مرکز انحنا اکنون دارای بزرگی ۱۵/۷۵ µT است ولی جهت آن معکوس شده است. شعاع دایرهٔ کوچکتر چقدر است؟



(الف) (ب)

شکل ۲۵-۴۶ مسئلهٔ ۱۸

حل: بخش‌های مستقیم مدار سهمی در میدان مغناطیس در مرکز کمان‌ها ندارند چون امتداد آنها از مرکز می‌گذرد. برای شکل (الف) میدان مغناطیسی ناشی از کمان‌ها با هم جمع می‌شوند و با توجه به اینکه میدان حاصل از کمان در مرکز آن از رابطه $\mu_۰ i\theta/۴\pi R$ به دست می‌آید، خواهیم داشت:

$$B_۱=\frac{\mu_۰ i\pi}{۴\pi R_{\text{کوچک}}}+\frac{\mu_۰ i\pi}{۴\pi R_{\text{بزرگ}}}$$

و برای شکل (ب) داریم:

$$B_۲=\frac{\mu_۰ i\pi}{۴\pi R_{\text{کوچک}}}+\frac{\mu_۰ i\pi}{۴\pi R_{\text{بزرگ}}}$$

با عددگذاری و تقسیم دو رابطه بر هم داریم:

$$\frac{۴۷/۲۵}{۱۵/۷۵}=\frac{\frac{۲}{R_۱}+۵۰}{\frac{۲}{R_۱}-۵۰}\Rightarrow R_۱=۰/۰۲\text{m}$$

●●۱۹- یک سیم دراز در امتداد محور x قرار دارد و حامل جریان $۳۰\,\text{A}$ در جهت مثبت x است. سیم دراز دیگری که عمود بر صفحهٔ xy است از نقطهٔ $(۰,۴/۰\,\text{m},۰)$ عبور می‌کند و حامل جریان $۴۰\,\text{A}$ در جهت مثبت z است. بزرگی میدان مغناطیسی حاصل در نقطهٔ $(۰,۲/۰\,\text{m},۰)$ چقدر است؟

حل: میدان حاصل از سیم اول برابر است با

$$B_۱=\frac{\mu_۰ i_۱}{۲\pi r_۱}\hat{k}=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۳۰)}{۲\pi(۴)}\hat{k}=۳\times۱۰^{-۶}\,\hat{k}\,\text{T}$$

فاصله سیم دو برابر $r_۲=۴-۲=۲m$ است، لذا داریم

$$\vec{B}_۲=\frac{\mu_۰ i_۲}{۲\pi r_۲}\hat{i}=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۴۰)}{۲\pi(۲)}\hat{i}=۴\times۱۰^{-۶}\,\hat{i}\,\text{T}$$

در نتیجه بزرگی میدان در نقطهٔ موردنظر برابر است با

$$B=\sqrt{B_۱^۲+B_۲^۲}=۵\times۱۰^{-۶}\,\text{T}$$

●●۲۰- در شکل ۲۵-۴۷، بخشی از یک سیم عایق‌بندی شدهٔ دراز که حامل جریان $i=۵/۷۵\,\text{mA}$ است به صورت دایره‌ای به شعاع $R=۱/۸۹\,\text{cm}$ درآمده است. اگر بخش دایره‌ای (الف) در صفحهٔ کاغذ به صورت نشان داده شده قرار داشته باشد و (ب) پس از چرخش ۹۰° پاد ساعتگرد به صورت مشخص شده عمود بر صفحه کاغذ قرار گیرد، میدان مغناطیسی را در مرکز انحنای C برحسب بردار یکه پیدا کنید؟

شکل ۲۵-۴۷ مسئلهٔ ۲۰

حل: (الف) میدان حاصل از سیم دراز و حلقهٔ دایره‌ای در مرکز حلقه با هم جمع شده و بنا به قاعده دست راست به سمت خارج صفحه هستند، $\hat{k}$، لذا داریم

$$\vec{B}_{\text{برایند}}=\vec{B}_{\text{سیم}}+\vec{B}_{\text{حلقه}}=\frac{\mu_۰ i}{۲\pi R}\hat{k}+\frac{\mu_۰ i}{۲R}\hat{k}=\frac{\mu_۰ i}{۲R}\left(\frac{۱}{\pi}+۱\right)$$

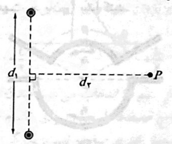
$$=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۵/۷۵)}{۲(۰/۰۱۸۹)}\left(\frac{۱}{\pi}+۱\right)\hat{k}=۲/۵۳\times۱۰^{-۷}\,\hat{k}\,\text{T}$$

(ب) در این حالت جهت میدان مغناطیسی حاصل از حلقه به سوی $\hat{i}$ است و داریم

$$\vec{B}=\frac{\mu_۰ i}{۲\pi R}\hat{k}+\frac{\mu_۰ i}{۲R}\hat{i}=\frac{\mu_۰ i}{۲R}\left(\frac{۱}{\pi}\hat{k}+\hat{i}\right)$$

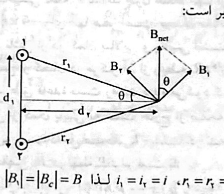
$$=۱/۹۲\times۱۰^{-۷}\,\text{T}\,\hat{i}+۶/۱۲\times۱۰^{-۸}\,\hat{k}\,\text{T}$$

●●۲۱- شکل ۲۵-۴۸، دو سیم مستقیم خیلی دراز (نشان داده شده با مقطع) هر یک حامل جریان $۴/۰۰\text{A}$ به طرف بیرون را نشان می‌دهد. فاصلهٔ $d_۱=۶/۰۰\,\text{m}$ و $d_۲=۴/۰۰\,\text{m}$ است. بزرگی میدان مغناطیسی در نقطهٔ P، که روی عمود منصف سیم‌ها قرار دارد، چقدر است؟



شکل ۲۵-۴۸ مسئلهٔ ۲۱

حل: با توجه به قاعده دست راست جهت میدان مغناطیسی به صورت زیر است:



داریم $r_۱=r_۲=r$، $i_۱=i_۲=i$ لذا $|B_۱|=|B_c|=B$ و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$B_{ne}=۲B\cos\theta=۲\frac{\mu_۰ i}{۲\pi r}\cos\theta$$

که در آن:

$$r=\sqrt{(d_۲)^۲+(d_۱)^۲}=\sqrt{(۴)^۲+(۶)^۲}=۵\text{m}$$

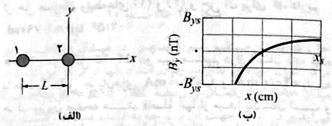
و

$$\theta=tg^{-۱}\left[\frac{(d_{۱/۲})}{d_۲}\right]=tg^{-۱}\left(\frac{۳}{۴}\right)=۳۶/۸۷^\circ$$

بنابراین داریم:

$$B_{\text{net}}=(۲)\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۴)}{۲\pi(۵)}\cos(۳۶/۸۷^\circ)=۲/۵۶\times۱۰^{-۷}\,\text{T}$$

●●۲۲- شکل ۲۵-۴۹ الف مقطع دو سیم موازی مستقیم به فاصلهٔ L را که حامل جریان است نشان می‌دهد. نسبت $i_۱/i_۲$ جریان‌ها برابر با $۴/۰۰$ است؛ جهت جریان‌ها نشان داده نشده است. شکل ۲۵-۴۹ ب مؤلفهٔ B_y میدان مغناطیسی خالص آنها را در امتداد محور x به طرف راست سیم ۲ نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $B_{ys}=۴/۰\text{nT}$ و مقیاس محور افقی با $x_s=۲۰/۰\text{cm}$ مشخص شده است. (الف) در چه مقدار $x>۰$ مؤلفهٔ B_y بیشینه است؟ (ب) اگر $i_۲=۳\text{mA}$ باشد، مقدار این بیشینه چقدر است؟ جهت (به طرف داخل یا به طرف خارج صفحه) (پ) $i_۱$ و (ت) $i_۲$ چگونه است؟



شکل ۲۵-۴۹ مسئلهٔ ۲۲

حل: با توجه به شکل ب مشاهده می‌کنیم که در $x=+۱۰\,cm$، $B_y=۰$ است پس جهت جریان در دو سیم مخالف یکدیگر است. وقتی دور می‌شویم میدان مثبت روبه بالا نتیجه می‌گیریم جریان در سیم (۲) رو به بیرون و جریان در سیم (۱) به سوی داخل صفحه است.

$$B_y=\frac{\mu_۰ i_۲}{۲\pi x}-\frac{\mu_۰ i_۱}{۲\pi(L+x)}=\frac{\mu_۰ i_۲}{۲\pi}\left(\frac{۱}{x}-\frac{۴}{L+x}\right)=\frac{\mu_۰ i_۲}{۲\pi}\frac{L-۳x}{x(x+۱)}$$

که با در نظر گرفتن $x=۱۰\,\text{cm}$، $B_y=۰$ و مقادیر داده شده $L=۳۰\,\text{cm}$ به دست می‌آید.

(الف)
$$\frac{dB_y}{dx}=\frac{\mu_۰ i_۲-۳x(x+L)-(L-۳x)(۲x+L)}{x^۲(x+L)^۲}$$
$$\Rightarrow ۳x^۲-۲Lx-L^۲=۰\Rightarrow x=L=۳۰\,\text{cm}$$

B_y در $x=L$ بیشینه است.

(ب) به ازای $i_۲=۰/۰۰۳\,\text{A}$ و $L=۳۰\,\text{cm}$، بیشینهٔ B_y حاصل شود

$$B_{y,\max}=\frac{\mu_۰ i_۲}{۲\pi L}=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۰/۰۰۳)}{۲\pi(۰/۳)}=۲\times۱۰^{-۹}\,\text{T}$$

(پ) و (ت) در بحث بالا پاسخ داده شده است.

●●۲۳- ILW شکل ۲۵-۵۰ پروتون متحرکی را با سرعت $\vec{v}=(-۲۰۰\text{m/s})\hat{j}$ نشان می‌دهد که به طرف سیم مستقیم درازی که حامل جریان $i=۳۵۰\text{mA}$ است حرکت می‌کند. در لحظهٔ نشان داده شده، فاصلهٔ پروتون از سیم $d=۲/۸۹\,\text{cm}$ است. نیروی مغناطیسی وارد بر پروتون ناشی از جریان را بر حسب بردار یکه پیدا کنید.

شکل ۲۵-۵۰ مسئلهٔ ۲۳

حل: میدان مغناطیسی در محل پروتون برابر $\vec{B}=\frac{\mu_۰ i}{۲\pi d}\hat{k}$ و در نتیجه داریم

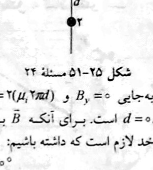
$$\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}=\frac{\mu_۰ iq}{۴\pi d}(\vec{v}\times\hat{k})=\frac{\mu_۰ iq}{۴\pi d}\left[v(-\hat{j})\times\hat{k}\right]$$

$$\vec{F}=-\frac{\mu_۰ iqv}{۴\pi d}\hat{i}$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت:

$$\vec{F}=-۷/۷۵\times۱۰^{-۲۳}\,\hat{i}\,\text{N}$$

●●۲۴- شکل ۲۵-۵۱ مقطع چهار سیم نازک موازی، مستقیم و خیلی دراز را نشان می‌دهد. این سیم‌ها حامل جریان‌های یکسان در جهت‌های نشان داده شده‌اند. در آغاز همهٔ چهار سیم در فاصلهٔ $d=۱۵/۰\,\text{cm}$ از مبداء مختصات قرار دارند که در آنجا میدان مغناطیسی خالص $\vec{B}$ را ایجاد کرده‌اند. (الف) تا چه مقدار x سیم ۱ را باید حرکت داد تا $\vec{B}$ به اندازهٔ ۳۰° پاد ساعتگرد بچرخد؟ (ب) وقتی سیم ۱ در وضعیت جدید قرار گرفت، تا چه مقدار x باید سیم ۳ را در امتداد محور x حرکت داد تا $\vec{B}$ به اندازهٔ ۳۰° بچرخد و به وضعیت اولیه برگردد؟



شکل ۲۵-۵۱ مسئلهٔ ۲۴

حل: پیش از جابه‌جایی $B_y=۰$ و $B_x=B_۲+B_۴=۲(\mu_۰ i/۲\pi d)$ که در آن $d=۰/۱۵m$ است. برای آنکه $\vec{B}$ به اندازه ۳۰° پادساعتگرد بچرخد لازم است که داشته باشیم:

$$B_y=B_x\tan ۳۰^\circ$$

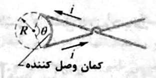
$$B_۱'-B_۲=۲\left(\frac{\mu_۰ i}{۲\pi d}\right)\tan ۳۰^\circ$$

$$\frac{\mu i}{۲\pi d'}-\frac{\mu_۰ i}{۲\pi d}=۲\left(\frac{\mu_۰ i}{۲\pi d}\right)\frac{۱}{\sqrt{۳}}\Rightarrow d'=\frac{\sqrt{۳}d}{\sqrt{۳}+۲}$$

(الف) به ازای $d=۱۵\,\text{cm}$ در رابطه بالا داریم $d'=۷cm$، یعنی اینکه باید سیم ۱ را به $x=-۷\text{cm}$ حرکت داد.

(ب) برای برگشت به وضعیت اولیه باید سیم ۳ را به $x=+۷\,\text{cm}$ حرکت داد تا تقارن اولیه دوباره برقرار شود.

●●۲۵- SSM سیمی با جریان $i=۳/۰۰\,\text{A}$ در شکل ۲۵-۵۲ نشان داده شده است. دو بخش مستقیم نیم بینهایت، هر دو مماس بر یک دایره، با یک کمان دایره‌ای که زاویهٔ مرکزی آن θ است به هم متصل‌اند. کمان وصل کننده و دو بخش مستقیم همگی در یک صفحه قرار دارند. اگر $B=۰$ باشد، θ چقدر است؟

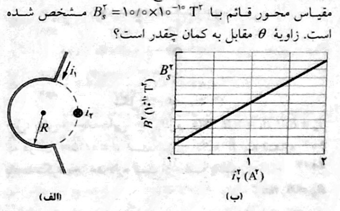


شکل ۲۵-۵۲ مسئلهٔ ۲۵

حل: سیم دارای سه بخش است. دو بخش سیم مستقیم نیم نامتناهی با میدان مغناطیسی به بزرگی $\mu_0 i/۴\pi R$ جهت آنها با توجه به قاعده دست راست به سمت خارج صفحه است $(\hat{k})$ و بخش دیگر یک کمان دایره‌ای است که بزرگی میدان مغناطیسی برابر $\frac{\mu_0 i\theta}{۴\pi R}$ و جهت آن در مرکز کمان به سمت داخل صفحه $(-\hat{k})$ است. حال می‌توان نوشت

$$\vec{B}=۲\left(\frac{\mu_0 i}{۴\pi R}\right)\hat{k}-\frac{\mu_0 i\theta}{۴\pi R}\hat{k}=۰\Rightarrow\theta=۲\ \text{rad}$$

●●۲۶- در شکل ۲۵-۵۳ الف، سیم ۱ شامل یک کمان دایره‌ای و دو طول شعاعی است؛ این سیم حامل جریان $i_۱=۰/۵۰\ \text{A}$ در جهت مشخص شده است. سیم ۲ که مقطع آن نشان داده شده سیم دراز مستقیمی عمود بر صفحهٔ شکل است. فاصلهٔ این سیم از مرکز کمان برابر با شعاع R کمان، و حامل جریان $i_۲$ است که می‌تواند تغییر کند. این دو جریان یک میدان مغناطیسی خالص $\vec{B}$ در مرکز کمان ایجاد می‌کنند. شکل ۲۵-۵۳ ب مربع بزرگی میدان $B^۲$ را بر حسب مربع جریان $i_۲^۲$ به دست می‌دهد. مقیاس محور قائم با $B_s^۲=۱۰/۰\times۱۰^{-۱۰}\ \text{T}^۲$ مشخص شده است. زاویهٔ θ مقابل به کمان چقدر است؟



شکل ۲۵-۵۳ مسئلهٔ ۲۶

حل: میدان ناشی از دو سیم راست در نقطه O صفر است چون امتداد آنها از این نقطه می‌گذرد و میدان ناشی از کمان طبق قاعده دست راست به سمت خارج از صفحه بوده و بزرگی آن از رابطه زیر به دست می‌آید

$$B_۱=\frac{\mu_0 i_۱\phi}{۴\pi R}$$

میدان ناشی از سیم ۲ به سمت بالا بوده و بزرگی آن نیز از رابطه زیر به دست می‌آید

$$B_۲=\frac{\mu i_۲}{۲\pi R}$$

حال با استفاده از قضیه فیثاغورث داریم:

$$B^۲=B_۱^۲+B_۲^۲$$

با توجه به نمودار مشاهده می‌کنیم که در $i_۲=۰$، $B^۲=۱\times۱۰^{-۱۰}\ T^۲$ لذا

$$(۱)\ ۱\times۱۰^{-۱۰}=\left(\frac{\mu_0 i_۱\phi}{۴\pi R}\right)^۲$$

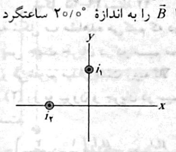
همچنین مشاهده می‌شود که در $i_۲^۲=۲\text{A}^۲$، $B^۲=۱۱\times۱۰^{-۱۰}\ \text{T}^۲$ لذا

$$۱۱\times۱۰^{-۱۰}=\frac{\mu_0^۲ i_۱^۲\phi^۲}{۱۶\pi^۲R^۲}+\frac{\mu_0^۲(۲)}{۱۶\pi^۲R^۲}\qquad(۲)$$

از حل همزمان رابطه‌های (۱) و (۲) و حل آن برای ϕ، داریم

$\phi=۱/۷۹\ \text{rad}$ یا $۱۰۲/۵^\circ$

●●۲۷- در شکل ۲۵-۵۴، دو سیم مستقیم دراز (نشان داده شده با مقطع) حامل جریان‌های $i_۱=۳۰/۰\ \text{mA}$ و $i_۲=۴۰/۰\ \text{mA}$ به طرف بیرون صفحه هستند. فاصلهٔ آنها از مبدأ یکسان است و یک میدان مغناطیسی $\vec{B}$ برقرار کرده‌اند. جریان $i_۱$ تا چه مقدار باید تغییر کند تا $\vec{B}$ را به اندازهٔ $۲۰/۰^\circ$ ساعتگرد بچرخاند؟



شکل ۲۵-۵۴ مسئلهٔ ۲۷

حل: زاویه میدان مغناطیسی برآیند ناشی از سیم‌های بلند برابر است با

$$\theta=\tan^{-۱}\left(\frac{B_۲}{B_۱}\right)=\tan^{-۱}\left[\left(\frac{\mu_0 i_۲}{۲\pi R}\right)/\left(\frac{\mu_0 i_۱}{۲\pi R}\right)\right]$$

$$=\tan^{-۱}\left(\frac{i_۲}{i_۱}\right)=\tan^{-۱}\left(\frac{۴}{۳}\right)=۵۳/۱۳^\circ$$

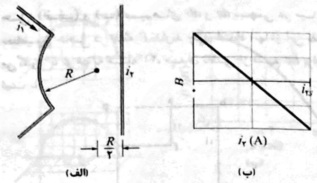
اگر بردار میدان مغناطیسی برایند به اندازهٔ ۲۰° بچرخد داریم

$$\varphi=۵۳/۱۳-۲۰=۳۳/۱۳^\circ$$

در نتیجه جریان $i_۱$ چنین می‌شود:

$$i_۱=\frac{i_۲}{\tan\vartheta}=\frac{۴}{\tan(۳۳/۱۳)}=۶۱/۳\ \text{mA}$$

●●۲۸- GO شکل ۲۵-۵۵ الف دو سیم حامل جریان را نشان می‌دهد. سیم ۱ شامل یک کمان دایره‌ای به شعاع R و دو طول شعاعی است؛ سیم حامل جریان در جهت نشان داده شده و برابر با $i_۱=۲/۰\ \text{A}$ است. سیم ۲ مستقیم و دراز است و جریان $i_۲$ که می‌تواند تغییر کند در آن برقرار است و در فاصلهٔ $R/۲$ از مرکز کمان قرار دارد. میدان مغناطیسی $\vec{B}$ خالص ناشی از این دو جریان در مرکز انحنای کمان اندازه‌گیری می‌شود. شکل ۲۵-۵۵ ب نمودار مؤلفهٔ $\vec{B}$ را در جهت عمود بر شکل برحسب تابعی از جریان $i_۲$ نشان می‌دهد. مقیاس محور افقی با $i_{۲s}=۱/۰۰A$ مشخص شده است. زاویهٔ در برگرفته شده توسط کمان چقدر است؟



شکل ۲۵-۵۵ مسئلهٔ ۲۸

حل: دو بخش مستقیم سیم ۱ سهمی در میدان مغناطیسی در مرکز کمان دایره‌ای ندارند، چون امتداد آنها از مرکز می‌گذرند. میدان حاصل از کمان از رابطهٔ $B_۱=\mu_0 i\theta/۴\pi R$ به دست می‌آید و در اینجا جهت آن با توجه به قاعده دست راست به سمت خارج صفحه، $+\hat{k}$ است. میدان حاصل از سیم دراز ۲ از رابطه $B_۲=\mu_0 i/۴\pi r$ به دست می‌آید که در اینجا $r=R/۲$ است و جهت میدان حاصل از آن در محل مرکز کمان به سمت داخل صفحه، $-\hat{k}$ است. در نتیجه میدان برایند در مرکز کمان برابر است با

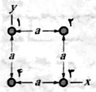
$$\vec{B}=B_۱\hat{k}-B_۲\hat{k}=\left(\frac{\mu_0 i_۱\theta}{۴\pi R}-\frac{\mu_0 i_۲}{۲\pi(R/۲)}\right)\hat{k}$$

از شکل ب دیده می‌شود که به ازای $i_۲=۰/۵A$، $\vec{B}=۰$ است. لذا داریم

$$\frac{\mu_0 i_۱\theta}{۴\pi R}=\frac{\mu_0 i_۲}{\pi R}\Rightarrow\theta=۴\left(\frac{i_۲}{i_۱}\right)$$

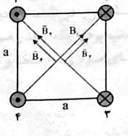
$\theta=۴\left(\frac{۰/۵}{۲}\right)=۱\ \text{rad}$ یا $۵۷/۳^\circ$

●●۲۹- SSM در شکل ۲۵-۵۶ چهار سیم مستقیم دراز بر صفحهٔ شکل عمودند و مقطع آنها مربعی به ضلع $a=۲۰\ \text{cm}$ می‌سازد. جریان در سیم‌های ۱ و ۴ به طرف بیرون صفحه و در سیم‌های ۲ و ۳ به طرف داخل صفحه‌اند و جریان در هر سیم $۲۰\ \text{A}$ است. میدان مغناطیسی خالص در مرکز مربع را برحسب بردار یکه پیدا کنید.



شکل ۲۵-۵۶ مسئله‌های ۲۹، ۳۷ و ۴۰

حل:



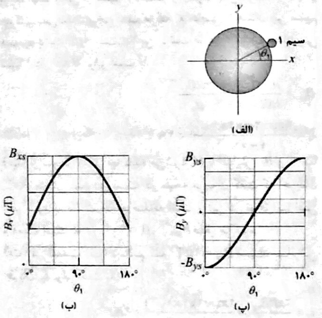
بزرگی میدان مغناطیسی حاصل از هر سیم در مرکز برابر $\mu_0 i/۲\pi r$ است که r برابر نصف قطر مربع یعنی $r=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۲}a)$ است. با توجه به تقارن مسئله مؤلفه‌های x میدان‌ها یکدیگر را خنثی می‌کنند. و فقط مؤلفه y داریم

$$B_y=۴B_۱\cos۴۵^\circ=۴\frac{\mu_0 i}{۲\pi\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}a\right)}\cdot\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۲\mu_0 i}{\pi a}$$

$$=\frac{۲(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۲۰)}{\pi(۰/۲)}=۸\times۱۰^{-۵}$$

در نتیجه $\vec{B}_{کل}=(۸\times۱۰^{-۵}\,\hat{j})\text{T}$

●●●۳۰- دو سیم دراز مستقیم و باریک با جریان، در برابر یک استوانهٔ پلاستیکی با طول مساوی و در شعاع $R=۲۰/۰\ \text{cm}$ از محور مرکزی استوانه قرار دارند. شکل ۲۵-۵۷ الف مقطع استوانه و سیم ۱ را نشان می‌دهد ولی سیم ۲ نشان داده نشده است. وقتی سیم ۲ در جای خود ثابت است، سیم ۱ از زاویهٔ $\theta_۱=۰^\circ$ تا زاویهٔ $\theta_۱=۱۸۰^\circ$ در ربع اول دوم دستگاه مختصات xy دور استوانه حرکت می‌کند. میدان مغناطیسی خالص $\vec{B}$ در مرکز



شکل ۲۵-۵۷ مسئلهٔ ۳۰

استوانه برحسب تابعی از $\theta_۱$ اندازه‌گیری می‌شود. شکل ۲۵-۶۲ ب مؤلفهٔ x این میدان یعنی B_x (مقیاس محور قائم با $B_{xs}=۶/۰\,\mu\text{T}$ مشخص شده است) و شکل ۲۵-۷۵ پ مؤلفهٔ y این میدان یعنی B_y را (مقیاس محور قائم با $B_{ys}=۴/۰\,\mu\text{T}$ مشخص شده است) برحسب تابعی از $\theta_۱$ نشان می‌دهند. (الف) سیم ۲ در چه زاویهٔ $\theta_۲$ واقع شده است؟ (ب) اندازه و (پ) جهت (به طرف داخل یا به طرف خارج صفحه) جریان در سیم ۱ و (ت) اندازه و (ث) جهت جریان در سیم ۲ را پیدا کنید.

حل: داریم

$$\theta_۱=۰\Rightarrow B_x=۲\mu\text{T}\,,\,B_y=-۴\mu\text{T}$$

$$\theta_1 = 90 \Rightarrow B_x = 6\mu T,\ B_y = 0$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi R},\ B_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi R}$$

(الف) وقتی سیم ۱ در زاویهٔ $\theta = \pm 180°$ قرار دارد مؤلفهٔ y میدان مغناطیسی آن برابر با صفر است چون خط اثر محور y از سیم می‌گذرد. همچنین از نمودار ب دیده می‌شود که مؤلفهٔ y میدان برایند نیز در $\theta = 90°$ برابر صفر است. لذا نتیجه می‌گیریم که سیم ۲ بسته به آنکه سیم ۱ در $\theta = +90°$ برابر صفر است. لذا نتیجه می‌گیریم که سیم ۲ بسته به آنکه سیم ۱ در $\theta = +90°$ یا $\theta = -90°$ باشد به ترتیب در $\theta = -90°$ و $\theta = +90°$ قرار دارد. نکته‌ای که باید به آن توجه کرد اینست که سیم ۲ درمکان خود ثابت شده است لذا سیم ۲ عملاً غیر از این دو مکان نمی‌تواند قرار داشته باشد و با توجه به حرکت پادساعتگرد سیم ۱، آن را در $\theta = -90°$ در نظر می‌گیریم.

(ب) از منحنی شکل ب در می‌یابیم که در $\theta = 90°$ مؤلفه x میدان مغناطیسی برایند، $B_{net,x}$ دارای مقدار بیشینهٔ $6\mu T$ است. همچنین دیده می‌شود که مؤلفهٔ x میدان مغناطیسی حاصل از سیم ۱ در $\theta = 0$ برابر با صفر است. بنابراین مؤلفه x میدان برایند فقط ناشی از سیم ۲ است و چون این ثابت است و حرکت نمی‌کند بنابراین سهم مؤلفهٔ x حاصل از میدان این سیم همواره برابر $2\mu T$ است. به این ترتیب مؤلفهٔ x میدان مغناطیسی سیم ۱ در $\theta = 0$ برابر است با:

$$B_{1x} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi R} \Rightarrow i_1 = \frac{2\pi R B_{1x}}{\mu_0}$$

$$i_1 = \frac{2\pi(0/2m)(4\times10^{-6})}{4\pi\times10^{-7}} = 4A$$

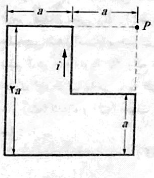
(پ) از نمودار شکل ب دیده می‌شود که با افزایش θ_1 از ۰ تا ۹۰°، منحنی صعودی است، در نتیجه می‌توان گفت که جریان سیم ۱ رو به سمت خارج صفحه است و این در توافق با این واقعیت است که در $\theta_1 = 90°$، $B_{net,y}$ صفر می‌شود.

(ت) در قسمت (ب) دیدیم که $B_{2x} = 2\mu T$ است، بنابراین جریان i_2 برابر است با:

$$i_2 = \frac{2\pi R B_{2x}}{\mu_0} = \frac{2\pi(0/2)(2\times10^{-6})}{4\pi\times10^{-7}} = 2A$$

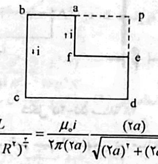
(ث) با توجه به قاعده دست است جریان سیم ۲ رو به سمت داخل صفحه است.

۳۱●●●- در شکل ۲۵-۵۸، طول a برابر با ۴/۷ cm و جریان i برابر با ۱۳A است. (الف) بزرگی و (ب) جهت (به طرف داخل صفحه یا به طرف خارج آن) میدان مغناطیسی در نقطهٔ P را پیدا کنید.



شکل ۲۵-۵۸ مسئلهٔ ۳۱

حل: (الف) و (ب) سیم‌های ab و de سهمی در میدان مغناطیسی حاصل در نقطهٔ P ندارند چون امتداد آنها از این نقطه می‌گذرد. با توجه به مسئله ۲۱، میدان ناشی از سیم bc برابر است با



$$B_1 = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}\frac{L}{(L^2+R^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi(2a)}\frac{(2a)}{\sqrt{(2a)^2+(2a)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\mu_0 i}{16\pi a}$$ به سمت خارج صفحه

میدان ناشی از سیم cd نیز برابر است با:

$$B_2 = \frac{\sqrt{2}\mu_0 i}{16\pi a}$$ به سمت خارج صفحه

میدان ناشی از سیم fa برابر است با:

$$B_3 = \frac{\mu_0 i}{2\pi a}\frac{a}{\sqrt{a^2+a^2}} = \frac{\sqrt{2}\mu_0 i}{8\pi a}$$ به سمت خارج صفحه

میدان ناشی از سیم ef برابر است با:

$$B_4 = \frac{\sqrt{2}\mu_0 i}{8\pi a}$$

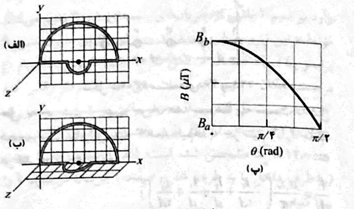
در نتیجه میدان مغناطیسی کل در P برابر است با:

$$B = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 i}{8\pi a} - \frac{2\sqrt{2}\mu_0 i}{16\pi a} = \frac{\sqrt{2}\mu_0 i}{8\pi a}$$

$$= \frac{(\sqrt{2})(4\pi\times10^{-7})(13)}{(8\pi)(4/7\times10^{-2})}$$ به سمت داخل صفحه

$$= 1/95\times10^{-5}\,T$$

۳۲●●●- همهٔ حلقه سیم حامل جریان در شکل ۲۵-۵۹ الف در یک صفحه قرار دارد و از یک نیم‌دایره به شعاع ۱۰/۰cm، یک نیم‌دایرهٔ کوچکتر به همان مرکز و دو طول شعاعی تشکیل شده است. نیمدایرهٔ کوچکتر به اندازهٔ زاویهٔ θ حول صفحه می‌چرخد تا بر آن عمود شود (شکل ۲۵-۵۹ ب). شکل ۲۵-۵۹ پ بزرگی میدان مغناطیسی خالص را در مرکز انحنا برحسب زاویهٔ θ به دست می‌دهد. مقیاس محور قائم با $B_a = 10/0\,\mu T$ و $B_b = 12/0\,\mu T$ مشخص شده است. شعاع دایرهٔ کوچکتر چقدر است؟



شکل ۲۵-۵۹ مسئلهٔ ۳۲

حل: بخش‌های مستقیم در مرکز میدانی ایجاد نمی‌کنند چون امتداد آنها از مرکز می‌گذرد. میدان مغناطیسی در مرکز ناشی از دو کمان بالایی و پایینی است که در این حالت با توجه به قاعده دست راست با هم جمع می‌شوند.

$$B_1 = \frac{\mu_0 i\pi}{4\pi R_1} + \frac{\mu_0 i\pi}{4\pi R_2}$$

و در وضعیت نهایی دو میدان مغناطیسی حاصل از کمان‌ها بر هم عمودند و داریم:

$$B_2^2 = B_z^2 + B_y^2 = \left(\frac{\mu_0 i\pi}{4\pi R_1}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 i\pi}{4\pi R_2}\right)^2$$

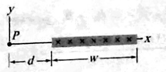
رابطه B_1 را به توان دو رسانده و بر رابطه B_2^2 تقسیم کنیم، داریم:

$$\left(\frac{B_1}{B_2}\right)^2 = \frac{\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)^2}{\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}}$$

بیشترین میدان مغناطیسی مربوط به وضعیت اولیه و کمترین میدان مربوط به وضعیت نهایی است. با توجه به نمودار بیشینه B برابر ۱۲T و کمینه آن ۱۰T است. و با در نظر گرفتن $R_1 = 0/1\,m$ خواهیم داشت:

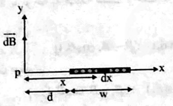
$$\left(\frac{12}{10}\right)^2 = \frac{\left(\frac{1}{0/1}+\frac{1}{R_2}\right)^2}{\frac{1}{(0/1)^2}+\frac{1}{R_2^2}} \Rightarrow R_2 = 0/023\,m$$

۳۳●●●- ILW SSM شکل ۲۵-۶۰ مقطع نوار باریک درازی به عرض $w = 4/91cm$ را نشان می‌دهد که حامل توزیع جریان یکنواخت $i = 4/61\mu A$ به طرف داخل صفحه است. در فاصلهٔ $d = 2/16cm$ از لبهٔ نوار در نقطهٔ P در صفحهٔ آن میدان مغناطیسی $\vec{B}$ برحسب بردار یکه چقدر است؟ (*راهنمایی:* نوار را به صورت سیم‌های موازی، باریک و دراز زیادی در نظر بگیرید.)



شکل ۲۵-۶۰ مسئلهٔ ۳۳

حل:



مطابق شکل عنصر dx از نوار را در نظر می‌گیریم که از آن جریان di می‌گذرد و میدان مغناطیسی حاصل از آن برابر است با جریان یک سیم دراز که در اینجا جهت آن در راستای محور y و بزرگی آن در آن نقطه چنین است.

$$dB = \frac{\mu_0 di}{2\pi x}$$

که در آن $di = \frac{i}{W}dx$ و داریم

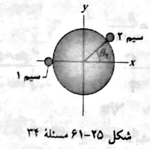
$$dB = \frac{\mu_0 i}{2\pi x}\frac{dx}{x}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi W}\int_d^{d+W}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 i}{2\pi W}\ln\frac{d+W}{d}$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده $B = 2/23\times10^{11}\,T$ و جهت آن نیز در راستای محور y است

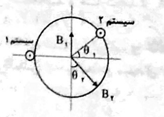
$$\vec{B} = 2/23\times10^{11}\,\hat{j}T$$

۳۴●●●- شکل ۲۵-۶۱ مقطع دو سیم مستقیم دراز را نشان می‌دهد. که روی استوانهٔ پلاستیکی به شعاع ۲۰/۰ cm نگهداشته شده‌اند. سیم ۱ حامل جریان $i_1 = 60/0\,mA$ به طرف بیرون صفحه است و در جای خود در سمت چپ استوانه قرار دارد. سیم ۲ حامل جریان $i_2 = 40/0\,mA$ به طرف بیرون صفحه است و می‌تواند در اطراف استوانه حرکت کند. در چه زاویهٔ θ_2 (مثبتی) سیم ۲ باید قرار گیرد تا در مبدأ، میدان مغناطیسی ناشی از دو جریان دارای بزرگی ۸۰/۰ nT باشد؟



شکل ۲۵-۶۱ مسئلهٔ ۳۴

حل:



بزرگی میدان‌های مغناطیسی $B_۱$ و $B_۲$ در مرکز برابر است با

$$B_۱ = \frac{\mu_0 i_۱}{۲\pi R} = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۶۰\times۱۰^{-۳})}{۲\pi(۰/۲)} = ۶\times۱۰^{-۸}\ T = ۶۰\,\text{nT}$$

$$B_۲ = \frac{\mu_0 i_۲}{۲\pi R} = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۴۰\times۱۰^{-۳})}{۲\pi(۰/۲)} = ۴\times۱۰^{-۸}\ T = ۴۰\,\text{nT}$$

جهت $\vec{B}_۱$ و $\vec{B}_۲$ با توجه به قاعده دست راست در شکل نشان داده شده است.

$$\vec{B}_{net} = B_۲\sin\theta_۲\hat{i} + (B_۱ - B_۲\cos\theta_۲)\hat{j}$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

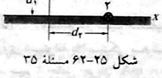
$$B_{net}^۲ = (B_۲\sin\theta_۲)^۲ + (B_۱ - B_۲\cos\theta_۲)^۲$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت:

$$\cos\theta_۲ = -\frac{۱}{۴} \Rightarrow \theta = ۱۰۴/۵^\circ$$

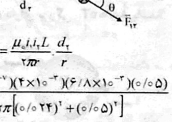
بخش ۲۵-۳ نیروی میان دو جریان موازی

●۳۵- **SSM** شکل ۲۵-۶۲ مقطع سیم ۱ را نشان می‌دهد؛ سیم دراز و مستقیم است و جریان $۴/۰۰\text{mA}$ به طرف خارج صفحه از آن می‌گذرد که در فاصلهٔ $d_۱ = ۲/۴۰\ \text{cm}$ از سطح قرار دارد. سیم ۲ که موازی با سیم ۱ و هم‌چنین دراز است، در فاصلهٔ افقی $d_۲ = ۵/۰۰\text{cm}$ از سیم ۱ قرار دارد و حامل جریان $۶/۸۰\ \text{mA}$ به طرف داخل صفحه است. مؤلفهٔ x نیروی مغناطیسی بر *یکای طول* سیم ۲ ناشی از سیم ۱ چقدر است؟



شکل ۲۵-۶۲ مسئلهٔ ۳۵

حل:

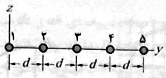


$$F_{۱۲x} = F_{۱۲}\cos\theta = \frac{\mu_0 i_۱ i_۲ L}{۲\pi r}\cdot\frac{d_۲}{r}$$

$$\frac{F_{۱۲x}}{L} = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۴\times۱۰^{-۳})(۶/۸\times۱۰^{-۳})(۰/۰۵)}{۲\pi\left[(۰/۰۲۴)^۲ + (۰/۰۵)^۲\right]}$$

$$= ۸/۸۴\times۱۰^{-۱۱}\ \text{N/m}$$

●●۳۶- در شکل ۲۵-۶۳، پنج سیم موازی دراز در صفحهٔ xy و به فاصلهٔ $d = ۵۰/۰\ \text{cm}$ از یکدیگر قرار دارند. جریان‌ها به طرف داخل صفحه‌اند و عبارت‌اند از $i_۱ = ۲/۰۰\ \text{A}$، $i_۳ = ۰/۲۵۰\ \text{A}$، $i_۴ = ۴/۰۰\ \text{A}$ و $i_۵ = ۲/۰۰\text{A}$. جریان به طرف خارج صفحه $i_۲ = ۴/۰۰\text{A}$ است. بزرگی نیروی خالص بر *یکای طول* وارد بر سیم ۳ ناشی از جریان‌ها در سیم‌های دیگر چقدر است؟



شکل ۲۵-۶۳ مسئله‌های ۳۶ و ۳۹

حل: به جز سیم ۲ جهت جریان همه سیم‌ها به سمت داخل صفحه است. بنابراین سیم ۳ همه سیم‌ها به جز سیم ۲، را جذب می‌کند. در نتیجه داریم

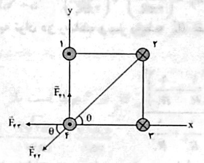
$$\frac{\vec{F}}{L} = \frac{\mu_0 i_۳}{۲\pi}\left(-\frac{i_۱}{۲d} + \frac{i_۲}{d} + \frac{i_۴}{d} + \frac{i_۵}{۲d}\right)\hat{j}$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت

$$\frac{\vec{F}}{L} = ۸\times۱۰^{-۷}\hat{j}\ \text{N/m}$$

●●۳۷- در شکل ۲۵-۵۶، چهار سیم مستقیم دراز بر صفحه عمودند و مقاطع آنها مربعی به ضلع $a = ۱۳/۵\ \text{cm}$ را تشکیل می‌دهند. هر سیم حامل جریان $۷/۵۰\ \text{A}$ است و جریان‌ها در سیم‌های ۱ و ۴ به طرف داخل صفحه و در سیم‌های ۲ و ۳ به طرف خارج صفحه‌اند. نیروی مغناطیسی خالص وارد بر هر متر *از طول* سیم ۴ را برحسب بردار یکه پیدا کنید.

حل:



$$\vec{F}_۴ = \vec{F}_{۴۱} + \vec{F}_{۴۲} + \vec{F}_{۴۳}$$

$$F_{۴x} = F_{۴۳} - F_{۴۲}\cos\theta$$

$$= -\frac{\mu_0 i^۲ L}{۲\pi a} - \frac{\mu_0 i^۲ L}{۲\pi\sqrt{۲}a}\cos۴۵^\circ = -\frac{۳\mu_0 i^۲ L}{۴\pi a}$$

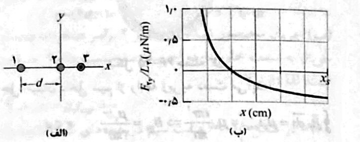
$$F_{۴y} = F_{۴۱} - F_{۴۲}\sin\theta = \frac{\mu_0 i^۲ L}{۲\pi a} - \frac{\mu_0 i^۲ L}{۲\pi\sqrt{۲}a}\sin۴۵^\circ = \frac{\mu_0 i^۲ L}{۴\pi a}$$

$$\vec{F}_۴ = -\frac{۳\mu_0 i^۲ L}{۴\pi a}\hat{i} + \frac{\mu_0 i^۲ L}{۴\pi a^۲}\hat{j}$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت:

$$\frac{\vec{F}_۴}{L} = (-۱۲۵\hat{i} + ۴۱/۵\hat{j})\mu\ \text{N/m}$$

●●۳۸- شکل ۲۵-۶۴ الف، مقطع سه سیم حامل جریان دراز، مستقیم و موازی با یکدیگر را نشان می‌دهد. سیم‌های ۱ و ۲ روی محور x و به فاصلهٔ d از یکدیگر قرار دارند. سیم ۱ حامل جریان $۰/۷۵۰\ \text{A}$ است ولی جهت جریان در آن معلوم نیست. سیم ۳ با جریان $۰/۲۵۰\ \text{A}$ به طرف بیرون صفحه است و می‌تواند در امتداد محور x به سمت راست سیم ۲ حرکت کند. وقتی سیم ۳ حرکت کند، بزرگی نیروی مغناطیسی خالص $\vec{F}_۲$ وارد بر سیم ۲ ناشی از جریان‌های سیم‌های ۱ و ۳ تغییر می‌کند. مؤلفهٔ y این نیرو $F_{۲y}$ و مقدار آن به ازای یکای طول سیم ۲ برابر $F_{۲y}/L_۲$ است. شکل ۲۵-۶۴ ب، مقدار $F_{۲y}/L_۲$ را برحسب مکان x سیم ۳ به دست می‌دهد. نمودار وقتی که $x \to \infty$ میل کند مجانبی به صورت $F_{۲y}/L_۲ = -۰/۶۲۷\mu\text{N/m}$ دارد. مقیاس محور افقی با $x_s = ۱۲/۰\ \text{cm}$ مشخص شده است. (الف) اندازه و (ب) جهت (به طرف داخل یا به طرف خارج صفحه) جریان در سیم ۲ را پیدا کنید.



شکل ۲۵-۶۴ مسئلهٔ ۳۸

حل: (الف) و (ب) با توجه به نمودار شکل ب مشاهده می‌شود که منحنی نیروی وارد بر سیم ۲ از صفر می‌گذرد لذا می‌توان نتیجه گرفت که سیم‌های ۱ و ۳ نیروهایی در جهت مخالف بر سیم ۲ وارد می‌کنند. بنابراین جهت جریان در سیم ۱ باید به سمت خارج صفحه باشد. وقتی سیم ۳ بسیار دور شود دیگر نیرویی بر سیم ۲ وارد نمی‌کند لذا در این حالت تنها نیرویی که به سیم ۲ وارد می‌شود از طرف سیم ۱ است. با توجه به نمودار در $x = ۴\ \text{cm}$ نیروی وارد بر سیم ۲ صفر است یعنی در این وضعیت داریم

$$\frac{F_{۲۱}}{L_۲} = \frac{F_{۲۲}}{L_۲} \Rightarrow ۰/۶۲۷\times۱۰^{-۶} = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۰/۲۵)i_۲}{۲\pi(۴\times۱۰^{-۲})}$$

$$\Rightarrow i_۲ = ۰/۵$$

همانطور که بحث جهت آن به سمت خارج صفحه است.

●●۳۹- در شکل ۲۵-۶۳، پنج سیم موازی دراز در صفحهٔ xy به فاصلهٔ $d = ۸/۰۰\text{cm}$ از یکدیگر قرار دارند. طول سیم‌ها $۱۰/۰\ \text{m}$ است و حامل جریان‌های یکسان $۳/۰۰\text{A}$ به طرف خارج صفحه‌اند. به هر سیم نیروی مغناطیسی ناشی از سیم‌های دیگر اثر می‌کند. نیروی مغناطیسی خالص وارد بر (الف) سیم ۱، (ب) سیم ۲، (پ) سیم ۳، (ت) سیم ۴ و (ث) سیم ۵ را برحسب بردار یکه پیدا کنید.

حل: نیرویی که سیم ۱ به سیم ۲ وارد می‌کند.

$$F_{۱۲} = \frac{\mu_0 i_۱ i_۲ L_۲}{۲\pi r_{۱۲}} = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۹)(۱۰)}{(۲\pi)(۸\times۱۰^{-۲})} = ۲/۲۵\times۱۰^{-۴}\ \text{N}$$

و به همین ترتیب داریم:

$$F_{۱۳} = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۹)(۱۰)}{(۲\pi)(۱۶\times۱۰^{-۲})} = ۱/۲۵\times۱۰^{-۴}\ \text{N}$$

$$F_{۱۴} = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۹)(۱۰)}{(۲\pi)(۲۴\times۱۰^{-۲})} = ۰/۷۵\times۱۰^{-۴}\ \text{N}$$

$$F_{۱۵} = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۹)(۱۰)}{(۲\pi)(۳۲\times۱۰^{-۲})} = ۰/۵۶۳\times۱۰^{-۴}\ \text{N}$$

(الف) سیم ۱: تمام نیروها جاذبه‌ای و در جهت مثبت محور y هستند.

$$\vec{F}_۱ = \vec{F}_{۱۲} + \vec{F}_{۱۳} + \vec{F}_{۱۴} + \vec{F}_{۱۵} = ۴/۶۹\hat{j}\ \text{N}$$

(ب) سیم ۲: نیروی $\vec{F}_{۱۲}$ و نیروی $\vec{F}_{۳۲}$ یکدیگر را خنثی می‌کنند.

$$\vec{F}_۲ = \vec{F}_{۴۲} + \vec{F}_{۵۲} = ۱/۱۲۵\times۱۰^{-۴}\hat{j} + ۰/۷۵\times۱۰^{-۴}\hat{j}$$

$$= ۱/۸۸\times۱۰^{-۴}\ \text{N}$$

(پ) سیم ۳: نیروی $\vec{F}_{۱۳}$ و $\vec{F}_{۵۳}$ و نیز نیروهای $\vec{F}_{۲۳}$ و $\vec{F}_{۴۳}$ یکدیگر را خنثی می‌کنند.

$$\vec{F}_۳ = ۰$$

(ت) سیم ۴: نیروی $\vec{F}_{۳۴}$ و $\vec{F}_{۵۴}$ یکدیگر را خنثی می‌کنند.

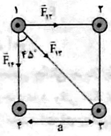
$$\vec{F}_۴ = -\vec{F}_۲ = -۱/۸۸\hat{j}\ \text{N}$$

(ث) سیم ۵:

$$\vec{F}_۵ = -\vec{F}_۱ = -۴/۶۹\hat{j}\ \text{N}$$

●●۴۰- در شکل ۲۵-۵۶، چهار سیم مستقیم دراز بر صفحه عمودند و مقاطع آنها مربعی به ضلع $a = ۸/۵۰\ \text{cm}$ را تشکیل می‌دهند. هر سیم حامل جریان $۱۵/۰\ \text{A}$ است و جریان‌ها به طرف خارج صفحه‌اند. نیروی مغناطیسی خالص *وارد* بر یک *متر از طول* سیم *را* که بر سیم ۱ وارد می‌شود، برحسب بردار یکه پیدا کنید.

حل:



$$F_{۱x} = F_{۱۲} + F_{۱۳}\sin۴۵^\circ$$

$$= \frac{\mu_0 i^۲ L}{۲\pi a} + \frac{\mu_0 i^۲ L}{۲\pi a\sqrt{۲}}\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۳\mu_0 i^۲ L}{۴\pi a}$$

$$F_{۱y} = F_{۱۴} + F_{۱۳}\cos۴۵ = \frac{۳\mu_0 i^۲ L}{۴\pi a}$$

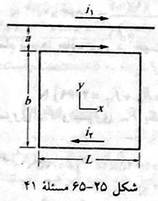
$$\vec{F}_۱ = F_{۱x}\hat{i} + F_{۱y}(-\hat{j}) = \frac{۳\mu_0 i^۲ L}{۴\pi a}(\hat{i} - \hat{j})$$

$$\frac{\vec{F}_۱}{L} = \frac{۳(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۱۵)^۲}{۴\pi(۸/۵\times۱۰^{-۲})}(\hat{i} - \hat{j})$$

$$= (۷/۹۴\times۱۰^{-۴}\ \text{N/m})\hat{i} - (۷/۹۴\times۱۰^{-۴}\ \text{N/m})\hat{j}$$

●●●۴۱- **ILW** در شکل ۲۵-۶۵، سیم دراز مستقیمی حامل جریان $i_۱ = ۳۰/۰\text{A}$ و حلقهٔ مستطیل شکل حامل جریان $i_۲ = ۲۰/۰\text{A}$ است. فرض کنید $a = ۱/۰۰\text{cm}$، $b = ۸/۰۰\text{cm}$ و

$L=۳۰/۰\,cm$. نیروی خالص وارد بر حلقه ناشی از $i_۱$ برحسب بردار یکه را پیدا کنید.



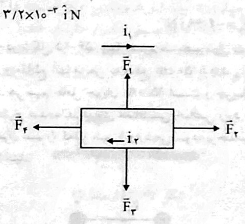
شکل ۲۵-۶۵ مسئلهٔ ۴۱

حل: نیروهای $\vec F_۲$ و $\vec F_۴$ از نظر بزرگی برابرند لذا همدیگر را خنثی می‌کنند و تنها باید برآیند نیروهای $\vec F_۱$ و $\vec F_۳$ را محاسبه کرد.

$$\vec F_{net}=(\vec F_۱-F_۳)\hat{j}=\left[\frac{\mu_۰ i_۱ i_۲ L}{۲\pi a}-\frac{\mu_۰ i_۱ i_۲ L}{۲\pi(a+b)}\right]\hat{j}$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت:

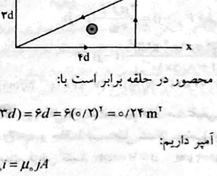
$$\vec F_{net}=۳/۲\times۱۰^{-۳}\,\hat{i}\,N$$



بخش ۲۵-۴ قانون آمپر

●۴۲- در یک ناحیهٔ خاص چگالی جریان یکنواخت $۱۵A/m^۲$ و در جهت مثبت z وجود دارد. وقتی انتگرال خطی در طول سه قطعه خط مستقیم از مختصات (x,y,z) برابر با $(۴d,۰,۰)$ تا $(۴d,۳d,۰)$، تا $(۰,۰,۰)$ و تا $(۴d,۰,۰)$ محاسبه شود مقدار $\oint \vec B\cdot d\vec s$ چقدر است؟ $d=۲۰\,cm$ است.

حل: مسیر انتگرال‌گیری به صورت زیر است:



مساحت محصور در حلقه برابر است با:

$$A=\frac{۱}{۲}(۴d)(۳d)=۶d=۶(۰/۲)^۲=۰/۲۴\,m^۲$$

از قانون آمپر داریم:

$$\oint \vec B\cdot\vec{ds}=\mu_۰ i=\mu_۰ jA$$

$$=(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۱۵)(۰/۲۴)=۴/۵۲\times۱۰^{-۶}\,T\cdot m$$

●۴۳- شکل ۲۵-۶۶ مقطع قطری یک استوانهٔ رسانای دراز به شعاع $a=۲/۰۰\,cm$ را که حامل جریان یکنواخت $۱۷۰\,A$ است نشان می‌دهد. بزرگی میدان مغناطیسی جریان در فاصلهٔ شعاعی (الف) ۰ ، (ب) $۱/۰۰cm$ ، (پ) $۲/۰۰cm$ (سطح سیم) و (ت) $۴/۰۰\,cm$ چقدر است؟

شکل ۲۵-۶۶ مسئلهٔ ۴۳

حل: میدان داخل سیم از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\oint \vec B\cdot\vec{ds}=\mu_۰ i_{enc}=\mu_۰\frac{i\pi r^۲}{\pi a^۲}\Rightarrow B_{in}=\frac{\mu_۰ i r}{۲\pi a^۲}\qquad r<a$$

میدان خارج سیم نیز از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\oint \vec B\cdot\vec{ds}=\mu_۰ i_{enc}\Rightarrow B_{out}=\frac{\mu_۰ i}{۲\pi r}\qquad r>a$$

(الف) برای $r<a$ و به ازای $r=۰$ داریم $B_{in}=۰$

(ب) برای $r<a$ و به ازای $r=۰/۰۱m$ با قرار دادن سایر مقادیر داده شده داریم

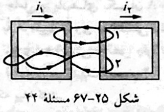
$$B_{in}=۸/۵\times۱۰^{-۴}\,T$$

(پ) برای $r=a=۰/۲m$ داریم $B_{out}=B_{in}=\frac{\mu_۰ i}{۲\pi a}$ که با قرار دادن مقادیر داده شده پاسخ $۱/۷\times۱۰^{-۳}\,T$ به دست می‌آید.

(ت) برای $r>a$ و به ازای $r=۰/۰۴m$ با قرار دادن مقادیر داده شده داریم

$$B_{out}=۸/۵\times۱۰^{-۴}\,T$$

●۴۴- شکل ۲۵-۶۷ دو مسیر بستهٔ پیچیده شده به دور دو حلقهٔ رسانا حامل جریان‌های $i_۱=۵/۰\,A$ و $i_۲=۳/۰\,A$ را نشان می‌دهد. مقدار انتگرال $\oint \vec B\cdot d\vec s$ در (الف) مسیر ۱ و (ب) مسیر ۲ چقدر است؟



شکل ۲۵-۶۷ مسئلهٔ ۴۴

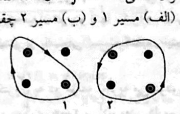
حل: (الف)

$$\oint_۱ \vec B\cdot\vec{ds}=\mu_۰(i_۲-i_۱)=(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۳-۵)$$
$$=-۲/۵۱\times۱۰^{-۶}\,T\cdot m$$

(ب)

$$\oint_۲ \vec B\cdot\vec{ds}=\mu_۰(-i_۲-i_۱-i_۱)=(۴\pi\times۱۰^{-۷})(-۳-۵-۵)$$
$$=-۱/۶۳\times۱۰^{-۵}\,T\cdot m$$

●۴۵- SSM از هر یک از هشت رسانای شکل ۲۵-۶۸ جریان $۲/۰A$ به طرف داخل یا به طرف خارج صفحه می‌گذرد. دو مسیر برای انتگرال خطی $\oint \vec B\cdot d\vec s$ نشان داده شده است. مقدار این انتگرال در (الف) مسیر ۱ و (ب) مسیر ۲ چقدر است؟



شکل ۲۵-۶۸ مسئلهٔ ۴۵

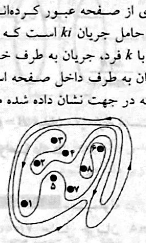
حل: (الف) در مسیر ۱ جهت انتگرال‌گیری ساعتگرد است

$$\oint_۱ \vec B\cdot\vec{ds}=\mu_۰ i_{enc}=\mu_۰(-۲i+i)-\mu_۰ i$$
$$=-(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۲)=-۲/۵۱\times۱۰^{-۶}\,T\cdot m$$

(ب) جریان محصور شده در مسیر ۲ برابر صفر است، دو جریان به سمت خارج و دو جریان به سمت داخل صفحه است، لذا داریم

$$\oint_۲ \vec B\cdot\vec{ds}=\mu_۰ i_{enc}=۰$$

●۴۶- در شکل ۲۵-۶۹ هشت سیم در نقطه‌های نشان داده شده به طور عمودی از صفحه عبور کرده‌اند. سیم با عدد $k\,(k=۱,۲,...,۸)$ حامل جریان ki است که $ki=۴/۵۰\,mA$. در مورد سیمهای با k فرد، جریان به طرف خارج صفحه و در مورد k زوج جریان به طرف داخل صفحه است. $\oint \vec B\cdot d\vec s$ را در طول مسیر بسته در جهت نشان داده شده محاسبه کنید.



شکل ۲۵-۶۹ مسئلهٔ ۴۶

حل:

$$\oint \vec B.\vec{ds}=\mu_۰ i_{enc}=\mu_۰(i_۱+i_۳+i_۷+i_۶)=\mu_۰(i+۳i+۷i-۶i)$$
$$=۵\mu_۰ i=(۵)(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۴/۵\times۱۰^{-۳})$$
$$=۲/۸۳\times۱۰^{-۸}\,T\cdot m$$

●●۴۷- ILW چگالی جریان $\vec J$ داخل یک سیم استوانه‌ای توپر دراز به شعاع $a=۳/۱\,mm$ در جهت محور مرکزی است و مقدار آن به طور خطی با فاصلهٔ شعاعی r از محور مطابق با $J=J_۰ r/a$ تغییر می‌کند، که در آن $J_۰=۳۱۰\,A/m^۲$ است. بزرگی میدان مغناطیسی را در (الف) $r=۰$ و (ب) $r=a/۲$ و (پ) $r=a$ به دست آورید.

حل: حلقه آمپری را به شعاع $r<a$ داخل سیم در نظر می‌گیریم

$$\oint \vec B.\vec{ds}=\mu_۰ i_{enc}=\mu_۰\int \vec j.\vec{dA}=\mu_۰\int_۰^r j_۰\left(\frac{r}{a}\right)(۲\pi r dr)$$

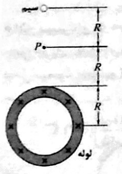
$$\Rightarrow B۲\pi r=\mu_۰\frac{۲\pi j}{۳a}r^۳\Rightarrow B=\frac{\mu_۰ j_۰ r^۲}{۳a}$$

(الف) به ازای $r=۰$، $B=۰$ است.

(ب) به ازای $r=\frac{a}{۲}$ و قرار دادن مقادیر داده شده داریم $B=۱\times۱۰^{-۷}\,T$.

(پ) به ازای $r=a$ خواهیم داشت $B=۴\times۱۰^{-۷}\,T$.

●●۴۸- در شکل ۲۵-۷۰ یک لولهٔ دایره‌ای دراز با شعاع خارجی $R=۲/۶\,cm$ حامل جریان (توزیع شده به طور یکنواخت) $i=۸/۰۰mA$ به طرف داخل صفحه است. سیمی در فاصلهٔ $۳/۰۰R$ از مرکز تا مرکز موازی با لوله قرار دارد. (الف) بزرگی و (ب) جهت (به طرف داخل یا به طرف خارج صفحه) جریان در سیم را پیدا کنید به طوری که مقدار میدان مغناطیسی خالص در نقطهٔ P دارای همان مقدار میدان مغناطیسی خالص در مرکز لوله ولی در جهت مخالف باشد.



شکل ۲۵-۷۰ مسئلهٔ ۴۸

حل: (الف) و (ب) میدان در مرکز استوانه فقط میدان ناشی از سیم است و میدان ناشی از لوله صفر است

$$B=\frac{\mu_۰ i_۲}{۲\pi r}=\frac{\mu_۰ i_۲}{۲\pi(۳R)}=\frac{\mu_۰ i_۲}{۶\pi R}$$

در نقطه P میدان ناشی از سیم و لوله برابر مقدار بالا ولی خلاف جهت آن است. میدان ناشی از سیم در P قوی‌تر از میدان در مرکز استوانه است. بنابراین جریان سیم نیز به سمت داخل صفحه است.

$$B=\frac{\mu_۰ i_۲}{۶\pi r}=\frac{\mu_۰ i}{۲\pi(۲R)}=\frac{\mu_۰ i_۲}{۲\pi R}\Rightarrow\frac{i_۲}{۶}=\frac{i}{۴}-\frac{i_۲}{۲}$$

$$\Rightarrow i_۲=\frac{۳}{۸}i=\left(\frac{۳}{۸}\right)(۸\times۱۰^{-۳})=۳\times۱۰^{-۳}\,A$$

بخش ۲۵-۵ سیملوله و چنبره

●۴۹- طول ضلع مقطع مربعی شکل یک چنبره $۵/۰۰cm$ و شعاع داخلی آن $۱۵/۰\,cm$ و با ۵۰۰ دور حامل جریان $۰/۸۰۰A$ است. (این سیملولهٔ مربعی شکل، به جای سیملولهٔ گرد در شکل ۲۵-۱۶، به شکل دونات درآمده است). میدان مغناطیسی داخل چنبره در (الف) فاصلهٔ شعاع داخلی و (ب) در فاصلهٔ شعاع خارجی، چقدر است؟

حل: میدان درون یک چنبره از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\oint \vec B\vec{dl}=\mu_۰ i_{inc}=\mu_۰ N i\Rightarrow B(۲\pi r)=\mu_۰ N i\Rightarrow B=\frac{\mu_۰ N i}{۲\pi r}$$

(الف) برای شعاع داخلی $r=a=۰/۱۵m$، داریم

$$B=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۵۰۰)(۰/۸)}{۲\pi(۰/۲)}=۵/۵۳\times۱۰^{-۴}\,T$$

(ب) برای شعاع خارجی $r=b=۰/۲m$

$$B=\frac{(4\pi\times10^{-7})(500)(0/8)}{2\pi(0/2)}=4\times10^{-4}\ \mathrm{T}$$

•۵۰- سیملوله‌ای به طول $95/0\,\mathrm{cm}$ و شعاع $2/00\mathrm{cm}$ دارای ۱۲۰۰ دور و حامل جریان $3/60\ \mathrm{A}$ است. بزرگی میدان مغناطیسی را داخل سیملوله محاسبه کنید.

حل:

$$B=\mu_\circ in=\mu_\circ\left(\frac{N}{L}\right)i=(4\pi\times10^{-7})\left(\frac{1200}{0/95}\right)(3/6)$$
$$=5/71\times10^{-3}\ \mathrm{T}=5/71\mathrm{mT}$$

•۵۱- سیملوله‌ای با ۲۰۰ دور به طول $25\mathrm{cm}$ و قطر $10\mathrm{cm}$ حامل جریان $0/29\ \mathrm{A}$ است. بزرگی میدان مغناطیسی $\vec{B}$ را داخل سیملوله محاسبه کنید.

حل:

$$B=\mu_\circ ni=\mu_\circ\left(\frac{N}{L}\right)i=(4\pi\times10^{-7})\left(\frac{200}{0/25}\right)(0/3)\mathrm{A}$$
$$=0/0003\,T=0/3\,\mathrm{mT}$$

•۵۲- سیملوله‌ای به طول $1/30\ \mathrm{m}$ و قطر $2/60\ \mathrm{cm}$ حامل جریان $18/0\ \mathrm{A}$ است. میدان مغناطیسی داخل سیملوله $23/0\ \mathrm{mT}$ است. طول سیمی را که سیملوله از آن ساخته شده است به دست آورید.

حل:
$$B=\mu_\circ ni=\mu_\circ\frac{N}{\ell}i\Rightarrow N=\frac{B\ell}{\mu_\circ i}$$

طول کلی سیم برابر خواهد بود با:

$$L=2\pi rN=\frac{2\pi rB\ell}{\mu_\circ i}$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده داریم $L=108\mathrm{m}$.

••۵۳- سیملولهٔ درازی با $\mathrm{cm}/$ دور ۱۰۰ حامل جریان i است. الکترونی در داخل سیملوله در دایره‌ای به شعاع $2/30\mathrm{cm}$ عمود بر محور سیملوله حرکت می‌کند. تندی الکترون $0/0460\,c$ (تندی نور $=c$) است. جریان i در سیملوله را به دست آورید.

حل: ابتدا B را به دست می‌آوریم. داریم

$$F=m\frac{v^2}{r}=qVB\Rightarrow B=\frac{mv}{qr}$$

$$B=\frac{(9/1\times10^{-31})(0/0460\times3\times10^{8})}{(1/6\times10^{-19})(2/3\times10^{-2})}=3/4\times10^{-4}\ \mathrm{T}$$

حال می‌توان جریان را از رابطه میدان برای سیملوله به دست آورد

••۵۴- الکترونی به طرف یک انتهای سیملوله‌ای پرتاب می‌شود. وقتی که الکترون وارد میدان مغناطیسی یکنواخت داخل سیملوله می‌شود، دارای تندی $800\,\mathrm{m/s}$ است و بردار سرعت آن با محور مرکزی سیملوله زاویهٔ 30° می‌سازد. تعداد دورهای سیملوله در طول آن ۸۰۰۰ و حامل جریان $4/0\mathrm{A}$ است. الکترون داخل سیملوله تا زمان خارج شدن از انتهای مقابل، در طول مسیر مارپیچی چند دور می‌چرخد؟ (در یک سیملولهٔ واقعی، که میدان در دو انتها یکنواخت نیست، تعداد دورها اندکی کمتر از پاسخی است که در اینجا به دست می‌آید.)

حل: سرعت الکترون به دو مؤلفه تجزیه می‌شود، یکی در جهت محور سیملوله و دیگری عمود بر آن، یعنی داریم

$$v_{11}=v\cos30^\circ=(800)\cos30^\circ=692/8\,\mathrm{m/s}$$
$$v_\perp=v\sin30^\circ=(800)\sin30^\circ=400\mathrm{m/s}$$

حال زمان تناوب T را می‌توان محاسبه کرد:

$$F=\frac{mv_\perp^2}{r}=qv_\perp B\Rightarrow mr\omega^2=qr\omega B$$

$$qB=m\omega=m\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{2\pi m}{6B}$$

اگر طول سیملوله L باشد، زمان لازم برای عبور از سیملوله برابر است با:

$$L=v_{11}t\Rightarrow t=\frac{L}{v_{11}}$$

تعداد گردش‌های الکترون چنین است:

$$N_\circ=\frac{t}{T}=\frac{\frac{L}{v_{11}}}{\frac{2\pi m}{qB}}=\frac{LqB}{2\pi mV_{11}}$$

که در آن $B=\mu_\circ\left(\frac{N}{L}\right)i$ میدان سیملوله است و با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت

$$N_\circ=1/62\times10^{6}$$

••۵۵- SSM ILW WWW سیملولهٔ درازی با $\mathrm{cm}/$ دور $10/0$ و شعاع $7/00\mathrm{cm}$ حامل جریان $20/0\mathrm{mA}$ است. در رسانای مستقیمی واقع در امتداد محور مرکزی سیملوله جریان $6/00\mathrm{A}$ برقرار است. (الف) در چه فاصلهٔ شعاعی از محور جهت میدان مغناطیسی ایجاد شده در $45/0^\circ$ نسبت به جهت محوری خواهد بود؟ (ب) بزرگی میدان مغناطیسی در آنجا چقدر است؟

حل: **(الف)** میدان مغناطیسی سیملوله، $\vec{B}_1$، درامتداد محور سیملوله است. میدان مغناطیسی حاصل از سیمی که روی محور سیموله قرار دارد، $\vec{B}_2$، عمود بر محور یا در واقع عمود بر $\vec{B}_1$ است. وقتی که زاویه میدان مغناطیسی برآیند با محور سیموله برابر 45° است، بدیهی است که زاویه این میدان با $\vec{B}_1$ نیز برابر با 45° است و برای انجام این امر کافی است که بزرگی‌های $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$ با هم برابر باشند:

$$\mu_\circ i_1 n=\frac{\mu_\circ i_2}{2\pi d}$$

که d فاصله محور تا نقطه مورد نظر است و با توجه به اینکه i_1 جریان سیملوله و i_2 جریان سیم است می‌توان d را از رابطه زیر به دست آورد

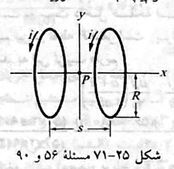
$$d=\frac{i_2}{2\pi i_1\pi}=\frac{6}{2\pi(2\times10^{-3})(10)}=4/77\,\mathrm{cm}$$

(ب) بزرگی میدان مغناطیسی برآیند برابر است با:

$$B=\sqrt{B_1^2+B_2^2}=\sqrt{2}B_1=\sqrt{2}\mu_\circ i_1 n$$
$$=\sqrt{2}(4\pi\times10^{-7})(20\times10^{-3})(10)=3/55\times10^{-5}\ \mathrm{T}$$

بخش ۲۵-۶ پیچه‌ی حامل جریان به عنوان دو قطبی مغناطیسی

•۵۶- شکل ۲۵-۷۱ آرایشی به نام پیچهٔ هلمهولتز[1] را نشان می‌دهد. این وسیله شامل دو پیچهٔ دایره‌ای هم محور هر یک دارای ۲۰۰ دور و شعاع $R=25/0\ \mathrm{cm}$ است که به فاصلهٔ $S=R$ از هم قرار دارند. این دو پیچه حامل جریان مساوی $i=12/2\ \mathrm{mA}$ در یک جهت‌اند. بزرگی میدان مغناطیسی را در P، وسط فاصلهٔ دو پیچه به دست آورید.



شکل ۲۵-۷۱ مسئلهٔ ۵۶ و ۹۰

حل: میدان مغناطیسی یک پیچهٔ جریان در نقطه‌ای به فاصلهٔ z از مرکز آن با معادله زیر داده می‌شود

$$B=\frac{N\mu_\circ iR^2}{2(R^2+z)^{\frac{3}{2}}}$$

میدان هر دو پیچه در نقطهٔ P در جهت محور x است و در این نقطه که $z=\frac{R}{2}$ است اندازه آنها نیز با هم برابر است لذا داریم

$$B=2\left[\frac{N\mu_\circ iR^2}{2(R^2+z)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده، $B=8/75\times10^{-6}\ \mathrm{T}$ به دست می‌آید.

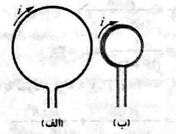
•۵۷- SSM دانشجویی با پیچیدن ۳۰۰ دور سیم به دور یک استوانهٔ چوبی به قطر $d=5/0\ \mathrm{cm}$ یک آهنربای الکتریکی کوتاه ساخته است. این پیچه به یک باتری که $4/0\mathrm{A}$ جریان در سیم ایجاد می‌کند بسته شده است. (الف) بزرگی گشتاور دو قطبی مغناطیسی این وسیله چقدر است؟ (ب) در چه فاصلهٔ محوری $z\gg d$ میدان مغناطیسی این دو قطبی $5/0\,\mu\mathrm{T}$ است (تقریباً یک دهم میدان مغناطیسی زمین)؟

حل: **(الف)**
$$\mu=NiA=Ni(\pi R^2)=(300)(4)\pi(2/5\times10^{-2})^2$$
$$=2/36\ \mathrm{A\cdot m^2}$$

(ب) میدان مغناطیسی روی محور یک دو قطبی مغناطیسی به فاصله $Z>>R$ از رابطه $B=\frac{\mu_\circ}{2\pi}\frac{\mu}{Z^3}$ به دست می‌آید که با استفاده از آن می‌توان نوشت

$$Z=\left(\frac{\mu_\circ\mu}{2\pi B}\right)^{\frac{1}{3}}=\left[\frac{(4\pi\times10^{-7})}{2\pi(5\times10^{-6})}\right]^{\frac{1}{3}}=0/46\mathrm{m}$$

•۵۸- شکل ۲۵-۷۲ الف طولی از یک سیم حامل جریان i را نشان می‌دهد که به صورت پیچه دایره‌ای با یک دور درآمده است. در شکل ۲۵-۷۲ ب همان طول از سیم به صورت پیچه‌ای با دو دور و نصف شعاع اولیه خم شده است. (الف) اگر B_a و B_b بزرگی‌های میدان‌های مغناطیسی در مرکز دو پیچه باشند، نسبت B_b/B_a چقدر است؟ (ب) نسبت بزرگی‌های گشتاور دو قطبی پیچه‌ها μ_b/μ_a چقدر است؟



شکل ۲۵-۷۲ مسئلهٔ ۵۸

حل: **(الف)** میدان در مرکز پیچه با شعاع R و تعداد N حلقه، برابر است با $B=\frac{\mu_\circ Ni}{2\pi R}$

در اینجا در حالت الف یک حلقه و در حالت ب دو حلقه داریم لذا:

$$\frac{B_b}{B_a}=\frac{2\frac{i}{R_b}}{\frac{i}{R_a}}=\frac{2R_a}{R_b}=4$$

(ب) نسبت گشتاورهای دو قطبی چنین می‌شود:

$$\frac{\mu_\circ}{\mu_a}=\frac{2iA_b}{iA_a}=\frac{2R_b^2}{R_a^2}=2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}=0/5$$

•۵۹- SSM بزرگی گشتاور دو قطبی مغناطیسی $\vec{\mu}$ در سیملولهٔ مسئلهٔ ۵۱ چقدر است؟

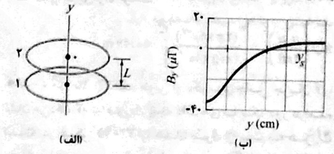
حل:

$$\mu=NiA=Ni(\pi r^2)=(200)(0/3)\pi(0/05)^2=0/47\ \mathrm{A\cdot m^2}$$

••۶۰- GO در شکل ۲۵-۷۳ الف، مرکزهای دو حلقهٔ دایره‌ای با جریان‌های مختلف و شعاع یکسان $4/0\mathrm{cm}$ روی محور y قرار دارند. فاصلهٔ حلقه‌ها در آغاز $L=3/0\ \mathrm{cm}$ و حلقهٔ ۲ در مبداء محور قرار دارد. جریان‌های دو حلقه یک میدان مغناطیسی خالص با مؤلفهٔ y برابر B_y در مبدأ ایجاد می‌کنند. می‌خواهیم این مؤلفه را وقتی حلقهٔ ۲ به تدریج در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند اندازه‌گیری کنیم. شکل ۲۵-۷۳ ب، B_y را برحسب تابعی از مکان y حلقهٔ ۲ به دست می‌دهد. وقتی

1. Helholtz

$\infty \leftarrow y$ میل می‌کند، منحنی به مجانب $B_y = ۷/۲۰\,\mu T$ نزدیک می‌شود. مقیاس محور افقی با $y_s = ۱۰/۰\,cm$ مشخص شده است. (الف) جریان $i_۱$ در حلقهٔ ۱ و (ب) جریان $i_۲$ در حلقهٔ ۲ چقدر است؟



شکل ۲۵-۷۳ مسئلهٔ ۶۰

حل: (الف) و (ب) با توجه به نمودار در $y=۶cm$ میدان صفر است که نتیجه می‌گیریم جهت جریان‌ها همسو است و داریم:

$$\frac{\mu_۰ i_۲ R^۲}{۲(R^۲+y^۲)^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{\mu_۰ i_۱ R^۲}{۲(R^۲+L^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$\frac{i_۲}{(۱۶+۳۶)^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{i_۱}{(۱۶+۹)^{\frac{۳}{۲}}} \Rightarrow i_۲ = ۳i_۱$$

همچنین با توجه به نمودار در $y=۰$، $B_y = -۴۰\,\mu T$ است:

$$-۴۰\times۱۰^{-۶} = -\frac{\mu_۰ i_۲ R^۲}{۲(R^۲+۰)^{\frac{۳}{۲}}} + \frac{\mu_۰ i_۱ R^۲}{۲(R^۲+L^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$$

که $i_۲ = ۳i_۱$ و همچنین قرار دادن سایر مقادیر داده شده خواهیم داشت $i_۱ = ۰/۹A$ از آنجا داریم $i_۲ = ۲/۷A$.

●●۶۱- یک حلقهٔ دایره‌ای به شعاع ۱۲cm حامل جریان ۱۵A است. پیچهٔ مسطحی به شعاع ۰/۸۲cm با ۵۰ دور و جریان ۱/۳A هم مرکز با این حلقه است. صفحهٔ حلقه بر صفحهٔ پیچه عمود است. فرض کنید که میدان مغناطیسی حلقه در پیچه یکنواخت باشد. بزرگی (الف) میدان مغناطیسی ایجاد شده به وسیلهٔ حلقه در مرکز و (ب) گشتاور نیروی وارد بر پیچه ناشی از حلقه چقدر است؟

حل: (الف) میدان مغناطیسی حلقه در مرکز آن برابر است با:

$$B = \frac{\mu_۰ i}{۲r} = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۱۵)}{(۲)(۰/۱۲)} = ۷/۹\times۱۰^{-۵}\,T$$

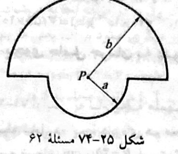
(ب) گشتاور دو قطبی پیچه برابر است با

$$\mu = NiA = (۵۰)(۱/۳)(۳/۱۴)(۰/۸۲\times۱۰^{-۲})^۲$$
$$= ۱/۲۷\times۱۰^{-۲}\,A\cdot m^۲$$

پیچه تحت تأثیر مغناطیسی حلقه قرار می‌گیرد و چون صفحه آن بر صفحه حلقه عمود است، داریم

$$\tau = \mu B \sin ۹۰ = (۱/۲۷\times۱۰^{-۲})(۷/۹\times۱۰^{-۵})$$
$$= ۱/۱\times۱۰^{-۶}\,N\cdot m$$

●●۶۲- در شکل ۲۵-۷۴ جریان $i = ۵۶/۲\,mA$ در حلقه‌ای شامل دو طول شعاعی و دو نیم‌دایره به شعاع‌های $a = ۵/۷۲\,cm$ و $b = ۹/۳۶\,cm$ با مرکز مشترک P برقرار شده است. (الف) بزرگی و (ب) جهت (به طرف داخل یا به طرف خارج صفحه) میدان مغناطیسی در P و (پ) بزرگی و (ت) جهت گشتاور دو قطبی مغناطیسی حلقه را پیدا کنید.



شکل ۲۵-۷۴ مسئلهٔ ۶۲

حل: (الف) و (ب) میدان در مرکز یک کمان حامل جریان از رابطه $B = \frac{\mu_۰ i B}{۴R}$ به دست می‌آید. در اینجا دو نیم‌دایره دایره $(\theta = \pi)$ داریم و میدان هر دو نیم‌دایره در نقطه P طبق قاعده دست راست به سمت داخل صفحه است و میدان دو تیکه سیم مستقیم نیز در نقطه P صفر است زیرا امتداد آنها از نقطه P می‌گذرند. به این ترتیب داریم

$$B_P = \frac{\mu_۰ i}{۴b} + \frac{\mu_۰ i}{۴a} = \frac{\mu_۰ i}{۴}\left(\frac{a+b}{ab}\right)$$
$$= \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۵۶/۲\times۱۰^{-۳})}{۴}\cdot\frac{(۵/۷۲+۹/۳۶)\times۱۰^{-۲}}{(۵/۷۲)(۹/۳۶)\times۱۰^{-۴}}$$
$$= ۴/۹۷\times۱۰^{-۷}\,T$$

(پ)
$$\mu = iA = i\left(\frac{۱}{۲}\pi b^۲ + \frac{۱}{۲}\pi a^۲\right) = \frac{i\pi}{۲}(b^۲+a^۲)$$

$$\mu = \frac{(۵۶/۲\times۱۰^{-۳})}{۲}\left[(۹/۳۶)^۲ + (۵/۷۲)^۲\right]\times۱۰^{-۴}$$
$$= ۱/۰۶\times۱۰^{-۳}\,A\cdot m^۲$$

(ت) جهت $\vec{\mu}$ در همان جهت $\vec{B}$ و به سمت داخل صفحه است.

●●۶۳- در شکل ۲۵-۷۵ رسانایی حامل ۶/۰A در طول مسیر بستهٔ *abcdefgha* یعنی ۸ ضلع از ۱۲ ضلع مکعبی به ضلع ۱۰cm است. (الف) با در نظر گرفتن مسیر به صورت سه حلقهٔ مربع (*bcfgb*، *abgha* و *cdefc*)، گشتاور مغناطیسی خالص مسیر را برحسب بردار یکه به دست آورید. (ب) بزرگی میدان مغناطیسی خالص در مختصات *xyz* (۰,۵/۰m,۰) چقدر است؟

شکل ۲۵-۷۵ مسئلهٔ ۶۳

حل:

(الف) برای مسیر befgb

$$\vec{\mu}_۱ = ia^۲\hat{j}$$

برای مسیر abgha

$$\mu_۲ = -ia^۲\hat{i}$$

برای مسیر cdefc

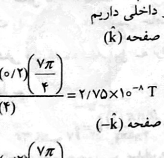
$$\vec{\mu}_۳ = ia\hat{i}$$
$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_۱ + \vec{\mu}_۲ + \vec{\mu}_۳ = ia^۲\hat{j} = (۶)(۰/۱)^۲\hat{j} = ۰/۰۶\hat{j}\,A\cdot m^۲$$

(ب) با توجه به اینکه نقطهٔ مورد نظر بسیار دور از مکعب است. دو حلقه abgha و cdefc اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند و فقط حلقه bcfgb می‌ماند که آن را می‌توان یک دو قطبی مغناطیسی در نظر گرفت و میدان دو قطبی الکتریکی نیز از رابطه زیر به دست می‌آید

$$B = \frac{\mu_۰\mu}{۲\pi z^۳} = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۰/۰۶)}{۲\pi(۵)^۳} = ۹/۶\times۱۰^{۱۱}\,T$$

مسئله‌های اضافی

۶۴- در شکل ۲۵-۷۶ حلقهٔ بسته‌ای حامل جریان $i = ۲۰۰\,mA$ است. این حلقه شامل دو سیم مستقیم شعاعی و دو کمان دایره‌ای هم مرکز به شعاع‌های ۲/۰۰m و ۴/۰۰m است. زاویهٔ θ برابر با $\pi/۲$ rad است. (الف) بزرگی و (ب) جهت (به طرف داخل یا به طرف خارج صفحه) میدان مغناطیسی خالص در مرکز انحنای P را پیدا کنید.



شکل ۲۵-۷۶ مسئلهٔ ۶۴

حل: (الف) و (ب) میدان ناشی از دو بخش مستقیم سیم در نقطه P صفر است چون $\vec{ds}\times\vec{r} = ۰$ است. میدان در مرکز یک کمان تحت زاویه Φ از رابطه زیر به دست می‌آید

$$B = \frac{\mu_۰ i\Phi}{۴\pi R}$$

و در اینجا $\Phi = ۲\pi - \theta = ۲\pi - \frac{\pi}{۴} = \frac{۷\pi}{۴}$ است لذا برای دو کمان خارجی و داخلی داریم

به سمت خارج صفحه $(\hat{k})$

$$B_۱ = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۰/۲)\left(\frac{۷\pi}{۴}\right)}{۴\pi(۴)} = ۲/۷۵\times۱۰^{-۸}\,T$$

به سمت داخل صفحه $(-\hat{k})$

$$B_۲ = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۰/۲)\left(\frac{۷\pi}{۴}\right)}{۴\pi(۲)} = ۵/۴۹\times۱۰^{-۸}\,T$$

به سمت داخل صفحه $(-\hat{k})$

$$B = B_۱ + B_۲ = (۲/۷۵ - ۵/۴۹)\times۱۰^{-۸} = -۲/۷۵\times۱۰^{-۸}\,T$$

۶۵- یک کابل استوانه‌ای به شعاع ۸/۰۰mm حامل جریان ۲۵/۰A است که به طور یکنواخت در مساحت مقطع توزیع شده است. در چه فاصله‌ای از مرکز سیم، نقطه‌ای داخل سیم وجود دارد که بزرگی میدان مغناطیسی در آن ۰/۱۰۰mT است؟

حل: میدان درون کابل استوانه‌ای از رابطه زیر به دست می‌آید

$$B = \frac{\mu_۰ ir}{۲\pi R^۲}$$

$$۰/۱\times۱۰^{-۳} = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۲۵)r}{۴\pi(۸\times۱۰^{-۳})} \Rightarrow r = ۱/۲۸\times۱۰^{-۳}\,m$$

۶۶- دو سیم دراز در صفحهٔ xy قرار دارند و هر یک حامل جریان در جهت مثبت محور x است. سیم ۱ در $y = ۱۰/۰\,cm$ حامل جریان ۶/۰۰A و سیم ۲ در $y = ۵/۰۰\,cm$ حامل جریان ۱۰/۰A است. (الف) میدان مغناطیسی خالص $\vec{B}$ را در مبدأ برحسب بردار یکه پیدا کنید. (ب) به ازای چه مقدار y میدان $\vec{B} = ۰$ می‌شود؟ (پ) اگر جریان در سیم ۱ معکوس شود، به ازای چه مقدار y میدان $\vec{B} = ۰$ می‌شود؟

حل: (الف) با استفاده از معادلهٔ میدان مغناطیسی سیم دراز و قاعدهٔ دست راست درمی‌یابیم

$$\vec{B} = \vec{B}_۱ + \vec{B}_۲ = -\frac{\mu_۰ i_۱}{۲\pi r_۱}\hat{k} - \frac{\mu_۰ i_۲}{۲\pi r_۲}\hat{k}$$
$$= -\frac{\mu_۰}{۲\pi}\left(\frac{۶}{۰/۱} + \frac{۱۰}{۰/۰۵}\right)\hat{k} = (-۵۲\times۱۰^{-۶}\,\hat{k})T$$

(ب) در ناحیهٔ $r_۲ < y < r_۱$، دیده می‌شود که $B = ۰$ و داریم

$$\frac{\mu_۰ i_۱}{۲\pi(r_۱ - y)} = \frac{\mu_۰ i_۲}{۲\pi(y - r_۲)}$$

که با گذاشتن مقادیر داده شده خواهیم داشت $y = ۰/۰۸۱۳m$.

(پ) سیم ۲ جریان بزرگتری دارد لذا این وضعیت در ناحیه $y > r_۱$ رخ می‌دهد که در آنجا داریم

$$\frac{\mu_۰ i_۱}{۲\pi(y - r_۱)} = \frac{\mu_۰ i_۲}{۲\pi(r_۲ - y)}$$

که با گذاشتن مقادیر داده شده خواهیم داشت $y = ۰/۰۱۷۵m$.

۶۷- دو سیم هر دو به طول L به شکل یک دایره و یک مربع درآورده شده‌اند و جریان i از هر یک می‌گذرد. نشان دهید که میدان مغناطیسی که در مرکز مربع ایجاد می‌شود از میدان مغناطیسی ایجاد شده در مرکز دایره بیشتر است.

حل: در مسئله ۸۷ نشان خواهیم داد که میدان مغناطیسی در مرکز مربع از رابطه زیر به دست می‌آید

$$B_{\text{مربع}} = \frac{۲\sqrt{۲}\mu_۰ i}{\pi a}$$

که در اینجا $a = \frac{L}{۴}$ است لذا داریم

$$B_{\text{مربع}} = \frac{۲\sqrt{۲}\mu_۰ i}{\pi\left(\frac{L}{۴}\right)} = ۱۱/۳۱\frac{\mu_۰ i}{\pi L}$$

میدان مغناطیسی مرکزی در مرکز دایره برابر است با

$$B_{\text{دایره}}=\frac{\mu_0 i}{4R}$$

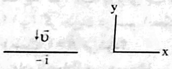
که در اینجا $R=\frac{L}{2\pi}$ است لذا داریم

$$B_{\text{دایره}}=\frac{\mu_0 i}{4\left(\frac{L}{2\pi}\right)}=\frac{\pi\mu_0 i}{L}=\pi^2\frac{\mu_0 i}{\pi L}=9.87\frac{\mu_0 i}{\pi L}$$

لذا مشاهده می‌شود که $B_{\text{دایره}}>B_{\text{مربع}}$ است.

۶۸- یک سیم مستقیم دراز حامل جریان ۵۰ A است. الکترونی که با تندی 1.0×10^7 m/s حرکت می‌کند، ۵/۰cm از سیم فاصله دارد. اگر سرعت الکترون در جهت (الف) به طرف سیم، (ب) موازی با سیم در جهت جریان و عمود بر دو جهت مشخص شده با (الف) و (ب)، باشد، بزرگی نیروی مغناطیسی وارد بر الکترون چقدر است؟

حل:

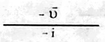


(الف) به سمت خارج صفحه

$$B_{\text{دایره}}=\frac{\mu_0 i}{2\pi r}=\frac{(4\pi\times10^{-7})(50)}{2\pi(0.05)}2\times10^{4}\ \text{T}$$

$$F=qvB\sin 90=(1.6\times10^{-19})(1\times10^{7})(2\times10^{-4})$$
$$=3.2\times10^{-16}\ \text{N}$$

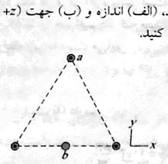
(ب)



$\vec{v}$ بر $\vec{B}$ عمود است و در نتیجه داریم $F=3.2\times10^{-16}\ N$

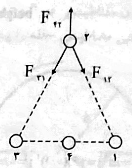
(پ) در اینجاست $\vec{v}$ موازی $\vec{B}$ است و $F=0$ است.

۶۹- سه سیم دراز موازی با محور z، هر یک حامل جریان ۱۰A در جهت مثبت z قرار دارند. نقطه‌های تلاقی این سیم‌ها با صفحهٔ xy یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۵۰cm را تشکیل می‌دهند که در شکل ۲۵-۷۷ نشان داده شده است. سیم چهارمی (سیم b) از وسط قاعدهٔ مثلث و موازی با سیم‌های دیگر عبور کرده است. اگر نیروی مغناطیسی خالص وارد بر سیم a صفر باشد، (الف) اندازه و (ب) جهت ($+z$ یا $-z$) جریان در سیم b را پیدا کنید.



شکل ۲۵-۷۷ مسئلهٔ ۶۹

حل:



(الف) برای سیم‌های موازی حامل جریان دیدیم که برای جریان‌های هم‌جهت نیرو جاذبه و جریان‌های متقابل نیرو دافعه است. با توجه به شکل نیروی $\vec{F}_{42}$ باید دافعه باشد تا اثر نیروهای جاذبهٔ $\vec{F}_{12}$ و $\vec{F}_{32}$ را خنثی نماید

$$F_{12}=F_{32}=\frac{\mu_0 i_1 i_2 L_2}{2\pi a}$$

برایند این دو نیرو برابر است با:

$$F=2F_{12}\cos30^\circ=2\frac{\mu_0 i_1 i_2 L_2}{2\pi a}\cos30^\circ$$

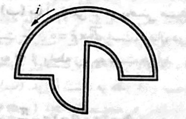
$$F_{42}=F\Rightarrow\frac{\mu_0 i_4 i_2 L_2}{2\pi(a\sin60^\circ)}=2\frac{\mu_0 i_1 i_2 L_2}{2\pi a}\cos30^\circ$$

که $a\sin60^\circ$ ارتفاع مثلث و فاصلهٔ بین سیم ۴ و سیم ۲ است. با ساده کردن عبارت بالا داریم

$$\frac{i_4}{\sin60}=2i_1\cos30\Rightarrow\frac{i_4}{0.87}=2(10)(87)\Rightarrow i_4=15.1\ \text{A}$$

(ب) جهت این جریان در خلاف جهت سیم‌های دیگر یعنی به سمت داخل صفحه است.

۷۰- شکل ۲۵-۷۸ حلقهٔ بسته‌ای با جریان $i=2.00$A را نشان می‌دهد. این حلقه شامل یک نیم‌دایره به شعاع ۴/۰۰m، ۲ ربع دایره هر یک به شعاع ۲/۰۰m و سه سیم مستقیم شعاعی است. بزرگی میدان مغناطیسی خالص در مرکز مشترک بخش‌های دایره‌ای چقدر است؟



شکل ۲۵-۷۸ مسئلهٔ ۷۰

حل: از قاعدهٔ دست راست میدان مغناطیسی حاصل از دو ربع دایره همدیگر را خنثی می‌کنند. بنابراین به ازای $\Phi=\frac{\pi}{2}$ در رابطه $B=\frac{\mu_0 i\Phi}{4\pi R}$ داریم

$$\frac{\mu_0 i(\pi/2)}{4\pi(2)}\hat{k}-\frac{\mu_0 i(\pi/2)}{4\pi(2)}\hat{k}=0$$

همچنین هر سه بخش مستقیم، سهمی در میدان مرکز مشترک بخش‌های دایره‌ای ندارند چون برای این سه بخش $\vec{ds}\times\vec{r}=0$ است. بنابراین فقط نیم‌دایره در میدان مغناطیسی سهم دارد. برای نیم‌دایره $\Phi=\pi$ است لذ داریم

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 i(\pi)}{4\pi(4)}\hat{k}=\frac{(4\pi\times10^{-7})(3)}{16}\hat{k}=(1.57\times10^{-7}\ \text{T})\hat{k}$$

۷۱- سیم لخت مسی نمره ۱۰ (به قطر ۲/۶mm) می‌تواند جریان ۵۰ A را بدون داغ شدن اضافی تحمل کند. به ازای این جریان، بزرگی میدان مغناطیسی در سطح سیم چقدر است؟

حل: میدان در سطح یک سیم از رابطه زیر به دست می‌آید

$$B=\frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

$$B=\frac{(4\pi\times10^{-7})(50)}{2\pi(1.3\times10^{-3})}=7.7\times10^{-3}\ \text{T}$$

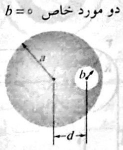
۷۲- یک سیم دراز قائم حامل جریانی نامعلوم است. هم محور با سیم یک سطح رسانای استوانه‌ای نازک دراز قرار دارد که حامل جریان ۳۰mA به طرف بالاست. شعاع سطح استوانه‌ای ۳/۰ mm است. اگر بزرگی میدان مغناطیسی در نقطهٔ ۵/۰ mm از سیم ۱/۰ μT باشد، (الف) اندازه و (ب) جهت جریان در سیم را پیدا کنید.

حل: (الف) طبق قانون آمپر یک حلقهٔ آمپر به شعاع $r=5$mm به مرکز سیم در نظر می‌گیریم و قانون آمپر را به کار می‌بریم:

$$\oint\vec{B}\cdot\vec{ds}=\mu_0 i_{inc}\Rightarrow B(2\pi r)=\mu_0(i_1+i_2)$$
$$\Rightarrow(1\times10^{-6})(2\pi)(5\times10^{-3})=(4\pi\times10^{-7})(0.3+i_2)$$
$$\Rightarrow i_2=-0.005\ \text{A}$$

(ب) با توجه به اینکه i_2 منفی به دست آمد بیانگر این است که در خلاف i_1 است.

۷۳- شکل ۲۵-۷۹ مقطع یک رسانای استوانه‌ای دراز به شعاع $a=4.00$cm شامل یک سوراخ استوانه‌ای دراز به شعاع $b=1.50$ cm را نشان می‌دهد. محور مرکزی استوانه و سوراخ موازی‌اند و فاصلهٔ آنها از یکدیگر $d=2.00$cm است. جریان $i=5.25$ A به طور یکنواخت در سطح سایه‌دار توزیع شده است. (الف) بزرگی میدان مغناطیسی در مرکز سوراخ چقدر است؟ (ب) دربارهٔ دو مورد خاص $b=0$ و $d=0$ بحث کنید.



شکل ۲۵-۷۹ مسئلهٔ ۷۳

حل: (الف) از اصل بر هم نهی استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم از قسمت خالی، دو جریان با همان چگالی استوانه اصلی، در خلاف جهت یکدیگر عبور می‌کنند. به این ترتیب جریانی که

هم جهت استوانه است آن را پر می‌کند و یک استوانه توپر حامل جریان که درون آن استوانهٔ توپری به شعاع a قرار دارد، داریم. میدان در داخل یک استوانه توپر را به دست می‌آوریم (برای چگالی جریان ثابت)

$$\oint B\cdot ds=\mu_0\int j da\Rightarrow B2\pi r=\mu_0 j\pi r^2\Rightarrow B=\frac{\mu_0 j}{2}r$$

با توجه به صورت مسئله چگالی جریان برای استوانه داده شده برابر است با

$$j=\frac{i}{A}=\frac{i}{\pi(a^2-b^2)}$$

لذا برای استوانه توپر

$$B_1=\frac{\mu_0}{2}\frac{i}{\pi(a^2-b^2)}r$$

و در مرکز سوراخ $r=d$، داریم

$$B_1=\frac{\mu_0 id}{2\pi(a^2-b^2)}$$

میدان حاصل از سوراخ استوانه‌ای با جریان متقابل، داریم $r=0$ است لذا داریم $B_2=0$ و میدان کل در مرکز سوراخ چنین خواهد بود

$$B=B_1+B_c=\frac{\mu_0 id}{2\pi}+0=\frac{(4\pi\times10^{-7})(5.25)(0.02)}{2\pi(16-2.25)\times10^{-4}}$$

$$=1.53\times10^{-4}\ T$$

(ب)

$$b=0\qquad B=\frac{\mu_0 id}{2\pi a^2}$$

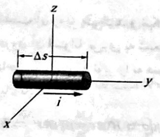
$$d=0\qquad B=0$$

۷۴- بزرگی میدان مغناطیسی در فاصلهٔ ۸۸/۰cm از محور یک سیم مستقیم دراز برابر با ۷/۳۰ μT است. جریان در سیم چقدر است؟

حل: برای سیم دراز میدان از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$B=\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\Rightarrow i=\frac{2\pi rB}{\mu_0}=\frac{2\pi(0.88)(7.3\times10^{-6})}{4\pi\times10^{-7}}=32.1\text{A}$$

۷۵- SSM شکل ۲۵-۸۰ قطعه سیمی به طول $\Delta s=3.0$ cm را نشان می‌دهد که مرکزش در مبدأ واقع است و جریان $i=2.0$A در جهت مثبت محور y (به عنوان بخشی از یک مدار کامل) از آن می‌گذرد. برای محاسبهٔ بزرگی میدان مغناطیسی $\vec{B}$ که توسط قطعه، در نقطه‌ای به فاصلهٔ چند متر از مبدأ ایجاد می‌شود، می‌توانیم از قانون بیو- ساوار به صورت $B=(\mu_0/4\pi)i\Delta s(\sin\theta)/r^2$ استفاده کنیم، زیرا r و θ در سراسر قطعه رسانا ثابت‌اند. $\vec{B}$ را (برحسب بردار یکه) در مختصات (x,y,z) (الف) (۰,۰,۵/۰m)، (ب) (۰,۶/۰m,۰)، (پ) (۷/۰m,۷/۰m,۰)، و (ت) (-۳/۰m,-۴/۰m,۰) پیدا کنید.



شکل ۲۵-۸۰ مسئلهٔ ۷۵

حل: با توجه به قانون بیو- ساوار داریم:

$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ i}{۴\pi}\frac{\overrightarrow{\Delta s}\times\vec{r}}{r^۳}$$

(الف) برای نقطه (۰،۰،۵)، $\vec{r}=r\hat{k}$ و $r=۵$

$$\vec{B}=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۲)}{۴\pi}\frac{(۰/۰۳)\hat{j}\times۵\hat{k}}{(۵)^۳}=(۲/۴\times۱۰^{-۱۰}\,\hat{i})\text{T}$$

(ب) برای نقطه (۰،۶،۰)، $\theta=۰$ و میدان صفر است، $\vec{B}=۰$

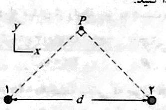
(پ) برای نقطه (۷،۷،۰)، $\theta=\frac{\pi}{۴}$ و $\vec{r}=۷\hat{i}+۷\hat{j}$ و $r=۷\sqrt{۲}$

$$\vec{B}=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۲)}{۴\pi}\frac{(۰/۰۳)\hat{j}\times(۷\hat{i}\times۷\hat{j})}{(۷\sqrt{۲})^۳}$$
$$=(-۴/۳\times۱۰^{-۱۱}\,\hat{k})\text{T}$$

(ت) برای نقطه (۰،۴-،۳-)، $\vec{r}=-۳\hat{i}-۴\hat{j}$ و $r=۵$

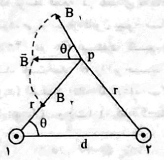
$$\vec{B}=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۲)}{۴\pi}\frac{(۰/۰۳)\hat{j}\times(-۳\hat{i}-۴\hat{j})}{(۵)^۳}$$
$$=(۱/۴۴\times۱۰^{-۱۰}\,\hat{k})\text{T}$$

۷۶- شکل ۲۵-۸۱ مقطع دو سیم موازی دراز را به فاصلهٔ $d=۱۰/۰\text{cm}$ از یکدیگر نشان می‌دهد که هر یک حامل جریان ۱۰۰A هستند، و در سیم ۱ جریان به طرف بیرون صفحه است. نقطهٔ P روی عمود منصف خط وصل‌کننده سیم‌ها قرار دارد. اگر جریان در سیم ۲ (الف) به طرف بیرون صفحه و (ب) به طرف داخل صفحه باشد، میدان مغناطیسی خالص برحسب بردار یکه را پیدا کنید.



شکل ۲۵- ۸۱ مسئلهٔ ۷۶

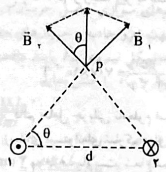
حل:



(الف) از قاعدهٔ دست راست درمی‌یابیم که جهت میدان‌ها مطابق شکل‌اند.

$$\vec{B}=(B_{۱x}+B_{۲x})(-\hat{i})$$
$$=۲\frac{\mu_\circ i}{۲\pi r}\cos\theta(-\hat{i})=\frac{\mu_\circ i}{\pi r}\frac{r}{d}(-\hat{i})=-\frac{\mu_\circ i}{\pi d}\hat{i}$$
$$=-\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۱۰۰)}{\pi(۰/۱)}=(-۴\times۱۰^{-۴}\,\text{T})\hat{i}$$

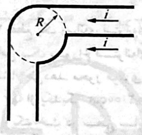
(ب)



جهت میدان‌ها با توجه به قاعدهٔ دست راست مطابق شکل است.

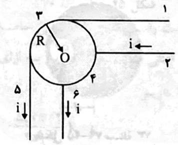
$$\vec{B}=(B_{۱y}+B_{۲y})j=۲\frac{\mu_\circ i}{۲\pi r}\cos\theta(\hat{j})$$
$$=\frac{\mu_\circ i}{\pi r}\frac{r}{d}\hat{j}=(۴\times۱۰^{-۴}\,\hat{j})\text{T}$$

۷۷- در شکل ۲۵-۸۲ دو سیم دراز نامتناهی حامل جریان‌های مساوی i هستند. هر یک از دو سیم دارای یک کمان ۹۰° روی پیرامون دایرهٔ یکسان R هستند. نشان دهید که میدان مغناطیسی $\vec{B}$ در مرکز دایره با میدان $\vec{B}$ در فاصلهٔ R زیر سیم مستقیم نامتناهی که حامل جریان i به سمت چپ باشد برابر است.



شکل ۲۵-۸۲ مسئلهٔ ۷۷

حل:



ساختار نشان داده شده شامل شش قسمت است چهار سیم راست و در کمان. سیم‌های ۲ و ۴ نقشی در میدان مرکزی ندارند چون امتداد آنها از مرکز می‌گذرد.

میدان حاصل از دو کمان با توجه به قاعده دست راست یکدیگر را خنثی می‌کنند. سیم‌های ۱ و ۵ دو سیم نیم‌نامتناهی هستند و میدان حاصل از آنها با هم جمع می‌شود و میدان کل در مرکزی برابر است با

$$B=\frac{\mu_\circ i}{۴\pi R}+\frac{\mu_\circ i}{۴\pi R}=\frac{\mu_\circ i}{۲\pi R}$$

۷۸- سیم درازی که حامل جریان ۱۰۰A است بر خط‌های میدان مغناطیسی یک میدان مغناطیسی یکنواخت با بزرگی ۵/۰mT عمود است. در چه فاصله‌ای از سیم میدان مغناطیسی خالص برابر با صفر است؟

حل: این نقاط باید در امتداد خطی موازی سیم و به فاصله r از آن باشد به طوری که

$$B_{\text{سیم}}=\frac{\mu_\circ i}{۲\pi r}=B_{\text{خارجی}}$$

که از اینجا r را می‌توان به دست آورد

$$۵\times۱۰^{-۳}=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۱۰۰)}{۲\pi r}\Rightarrow r=۴\times۱۰^{-۳}\ \text{m}$$

۷۹- یک رسانای استوانه‌ای توخالی دراز (به شعاع داخلی ۲/۰mm و شعاع خارجی ۴/۰mm) حامل جریان ۲۴A است که به طور یکنواخت در مقطع آن توزیع شده است. سیم باریک درازی که هم محور با استوانه است حامل جریان ۲۴A در خلاف جهت است. بزرگی میدان مغناطیسی (الف) ۱/۰mm، (ب) ۳/۰mm و (پ) ۵/۰mm از محور مرکزی سیم و استوانه چقدر است؟

حل: **(الف)** برای $r=۱\text{mm}$، حلقهٔ آمپری را به همین شعاع در نظر بگیریم تنها جریان محصور شده در حلقه، جریان حاصل از سیم است، لذا داریم

$$B_{\text{out}}=\frac{\mu_\circ iw}{۲\pi r}=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۲۴)}{۲\pi(۱\times۱۰^{-۳})}=۴/۸\times۱۰^{-۳}\ \text{T}$$

(ب)

در اینجا یک حلقهٔ آمپری را به شعاع $r=۳\text{mm}$ در نظر می‌گیریم جریان محصور شده در حلقه شامل جریان سیم دراز مرکزی و بخشی از پوسته استوانه‌ای است. جریان عبوری از این بخش را می‌توان از تناسب زیر به دست آورد

$$\pi(a^۲-b^۲)\qquad i$$
$$\pi(a^۲-b^۲)\qquad i\Rightarrow i'=\frac{r^۲-b^۲}{a^۲-b^۲}i$$

آنگاه از قانون آمپر داریم:

$$B=\frac{\mu_\circ i_{inc}}{۲\pi r}=\frac{\mu_\circ(i_w-i')}{۲\pi r}$$
$$B=\frac{\mu_\circ}{۲\pi r}\left(i_w-\frac{r^۲-b^۲}{a^۲-b^۲}i\right)$$

که با قرار دادن مقادیر داده، خواهیم داشت

$$B=۹/۳\times۱۰^{-۴}$$

(پ) در این حالت حلقه آمپری را به شعاع $r=۵\text{mm}$ در می‌گیریم. جریا محصور در حلقه برابر صفر است چون $i=-i_w$ است، لذا از قانون آمپر داریم $B=۰$.

۸۰- یک سیم دراز شعاعی بزرگتر از ۴/۰mm دارد و حامل جریانی است که به طور یکنواخت در مقطع آن توزیع شده است. بزرگی میدان مغناطیسی ناشی از جریان در نقطه‌ای با فاصلهٔ ۴/۰mm از محور سیم ۰/۲۸mT و در نقطه‌ای با فاصلهٔ ۱۰mm از سیم ۰/۲۰mT است. شعاع سیم چقدر است؟

حل: با توجه به اینکه $R>۴\text{mm}$ است، فاصله ۴mm درون سیم است و برای درون سیم میدان از رابطه زیر به دست می‌آید

$$B_{in}=\frac{\mu_\circ ir}{۲\pi R^۲}$$

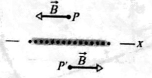
$$(۰/۲۸\times۱۰^{-۳})=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})i(۴\times۱۰^{-۳})}{۲\pi R^۲}\qquad(۱)$$

فاصله ۱۰mm خارج سیم و برای خارج از سیم میدان از رابطه زیر به دست می‌آید

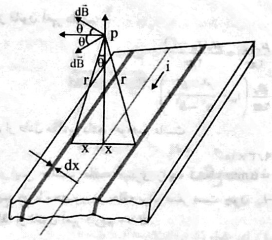
$$B_{out}=\frac{\mu_\circ i}{۲\pi r}\Rightarrow ۰/۲\times۱۰^{-۳}=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})i}{۲\pi(۱۰\times۱۰^{-۳})}\Rightarrow i=۱۰\,\text{A}$$

با قرار دادن مقدار فوق در رابطه (۱) شعاع به دست می‌آید $R=۵/۳۴\text{ mm}$.

۸۱- SSM شکل ۲۵-۸۳ مقطع یک برگهٔ رسانای نامتناهی را که حامل جریان بر یکای طول x برابر با λ است نشان می‌دهد؛ جریان به طور عمود و به طرف بیرون از صفحه خارج می‌شود. **(الف)** با استفاده از قانون بیو- ساوار و تقارن نشان دهید که برای تمام نقطه‌های P در بالای برگه و تمام نقطه‌های P زیر آن، بزرگی میدان مغناطیسی $\vec{B}$ موازی با برگه و در جهت نشان داده شده است. (ب) با استفاده از قانون آمپر نشان دهید که در تمام نقطه‌های P و P' داریم $B=\frac{۱}{۲}\mu_\circ\lambda$.



شکل ۲۵-۸۳ مسئلهٔ ۸۱



حل: (الف) این برگه را می‌توان مجموعه‌ای از رشته‌های دراز به پهنای کوچک dx در نظر گرفت. مطابق شکل دو رشته متقارن را که در نظر بگیریم مشاهده می‌شود که مؤلفه‌های قائم یکدیگر را خنثی و مؤلفه‌های افقی با هم جمع می‌شوند.

(ب) بزرگی میدان dB ناشی از یک رشته جریان برابر است با:

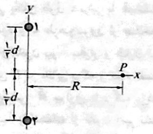
$$dB=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{di}{r}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\lambda dx}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

همانطور که در قسمت (الف) دیدیم تنها مؤلفه افقی میدان وجود دارد لذا

$$B=\int dB\cos\theta=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu_0\lambda dx}{2\pi\sqrt{R^2+x^2}}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

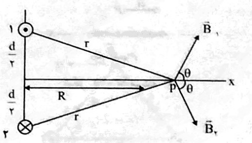
$$=\frac{\mu_0\lambda R}{\pi}\int_{\pi}^{\pi/2}\frac{R(1+\tan^2\theta)d\theta}{R^2(1+\tan\theta)}\Rightarrow B=\frac{\mu_0\lambda}{2}$$

۸۲- شکل ۲۵-۸۴ مقطع دو سیم موازی دراز به فاصلهٔ $d=18/6\ \text{cm}$ از یکدیگر را نشان می‌دهد. هر یک از سیم‌ها حامل جریان ۴/۲۳A به طرف بیرون صفحه در سیم ۱ و به طرف داخل صفحه در سیم ۲ است. میدان مغناطیسی در نقطهٔ P در فاصلهٔ $R=34/2\ \text{cm}$ را بر حسب بردار یکه پیدا کنید.



شکل ۲۵-۸۴ مسئلهٔ ۸۲

حل:



جهت میدان‌های مغناطیسی را با استفاده از قاعده دست راست رسم می‌کنیم. داریم

$$|\vec{B}_1|=|\vec{B}_2|$$

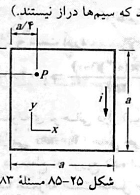
مؤلفه‌های قائم یکدیگر را خنثی می‌کنند و برایند مؤلفه‌های افق نیز برابر است با

$$B_x=B_1\cos\theta+B_2\cos\theta=2B_1\cos\theta=2\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\right)\left(\frac{d/2}{r}\right)$$

$$=\frac{\mu_0 id}{2\pi r^2}=\frac{\mu_0 id}{2\pi(R^2+d\frac{2}{4})}$$

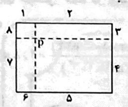
که با قرار دادن مقادیر داده شده $\vec{B}=(1/25\times10^{-6}\ \text{T})\hat{i}$

۸۳- SSM در شکل ۲۵-۸۵ اگر $i=10\ \text{A}$ و $a=8/0\ \text{cm}$ باشد، میدان مغناطیسی در نقطهٔ P را برحسب بردار یکه پیدا کنید. (توجه کنید که سیم‌ها دراز نیستند.)



شکل ۲۵-۸۵ مسئلهٔ ۸۳

حل: قاب را به هشت قسمت می‌کنیم، آنگاه میدان مغناطیسی هر یک را در نقطه P به دست آورده و سپس جمع می‌کنیم، برای انجام این امر از نتیجه مسئله ۲۱ استفاده می‌کنیم. میدان ناشی از یک سیم حامل جریان i به طول L در نقطه‌ای به فاصله R از سیم برابر است با



$$B=\frac{\mu_0 i}{4\pi R}\frac{L}{\sqrt{L^2+R^2}}$$

$$B_1=B_8=\frac{\sqrt{2}\mu_0 i}{8\pi(a/4)}=\frac{\sqrt{2}\mu_0 i}{2\pi a}$$

$$B_4=B_5=\frac{\sqrt{2}\mu_0 i}{8\pi(3a/4)}=\frac{\sqrt{2}\mu_0 i}{6\pi a}$$

$$B_2=B_7=\frac{\mu_0 i}{4\pi(a/4)}\frac{3a/4}{\left[(3a/4)^2+(a/4)^2\right]^{\frac{1}{2}}}=\frac{3\mu_0}{\sqrt{10}\pi a}$$

$$B_3=B_6=\frac{\mu_0 i}{4\pi(3a/4)}\frac{a/4}{\left[(a/4)^2+(3a/4)^2\right]^{\frac{1}{2}}}=\frac{\mu_0}{3\sqrt{10}\pi a}$$

و در نتیجه خواهیم داشت

$$\vec{B}_P=\sum_{n=1}^{8}B_1(-\hat{k})=2\frac{\mu_0 i}{\pi a}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{1}{3\sqrt{10}}\right](-\hat{k})$$

$$=(2\times10^{-4}\ \text{T})(-\hat{k})$$

۸۴- سه سیم دراز همه در صفحهٔ xy و موازی با محور x قرار دارند. فاصلهٔ سیم‌ها از یکدیگر مساوی و برابر ۱۰cm است. از دو سیم بیرونی جریان ۵/۰A در جهت مثبت x می‌گذرد. اگر جریان در سیم مرکزی ۳/۲A (الف) در جهت مثبت x و (ب) در جهت منفی x باشد، بزرگی نیروی وارد بر ۳/۰m هر یک از دو سیم بیرونی چقدر است؟

حل: (الف) نیرویی که دو سیم موازی به طول L و فاصله d بر یکدیگر وارد می‌کنند چنین است

$$F_{12}=\frac{\mu_0 i_1 i_2 L}{2\pi d}$$

در اینجا هر سه سیم حامل جریان‌هایی هم جهت هستند و یکدیگر را جذب می‌کنند. بنابراین بالاترین سیم توسط دو سیم دیگر به سمت پایین کشیده می‌شود و داریم

$$F=\frac{\mu_0 L}{2\pi}\left[\frac{(5)(3/2)}{(0/1)}+\frac{(5)(5)}{(0/2)}\right]$$

در نتیجه $F=1/7\times10^{-4}\ \text{N}$ می‌شود.

(ب) در این حالت بالاترین سیم توسط پایین‌ترین سیم، روبه بالا دفع شده و توسط سیم پایینی‌اش رو به پایین کشیده می‌شود. بنابراین داریم

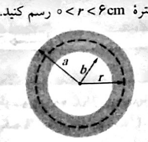
$$F=\frac{\mu_0 L}{2\pi}\left[\frac{(5)(3/2)}{(0/1)}+\frac{(5)(5)}{(0/2)}\right]$$

در نتیجه $F=2/1\times10^{-5}\ \text{N}$ می‌شود.

۸۵- شکل ۲۵-۸۶ مقطع یک رسانای استوانه‌ای توخالی به شعاع‌های a و b را نشان می‌دهد که حامل جریان i است که به طور یکنواخت توزیع شده است. (الف) نشان دهید که بزرگی میدان مغناطیسی $B(r)$ در مورد فاصلهٔ شعاعی r در گسترهٔ $b<r<a$ با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$B=\frac{\mu_0 i}{2\pi(a^2-b^2)}\frac{r^2-b^2}{r}$$

(ب) نشان دهید که هرگاه $r=a$ باشد، این معادله بزرگی میدان مغناطیسی B در سطح یک سیم مستقیم دراز حامل جریان i را به دست می‌دهد؛ هرگاه $r=b$ باشد، میدان مغناطیسی صفر به دست می‌دهد، و هرگاه $b=0$ باشد، میدان مغناطیسی داخل یک رسانای توپر به شعاع a و حامل جریان را به دست می‌دهد. (پ) فرض کنید که $a=2/0\ \text{cm}$ ، $b=1/8\ \text{cm}$ و $i=100\ \text{A}$ باشد، حال $B(r)$ را در گسترهٔ $0<r<6\ \text{cm}$ رسم کنید.



شکل ۲۵-۸۶ مسئلهٔ ۸۵

حل: (الف) حلقه آمپری به شعاع r را در نظر می‌گیریم، داریم:

$$\oint\vec{B}\cdot\vec{ds}=\mu_0 i_{inc}\Rightarrow B=\frac{\mu_0 i_{inc}}{2\pi r}$$

تناسب زیرا به کار می‌بریم، i_{inc} جریان عبوری از پوسته رسانا تا خط‌چین است.

$$\begin{matrix}\pi(a^2-b^2) & i\\ \pi(a^2-b^2) & i_{inc}\end{matrix}\Rightarrow i_{inc}=\frac{(r^2-b^2)}{(a^2-b^2)}i$$

آنگاه داریم:

$$B=\frac{\mu_0 i}{2\pi(a^2-b^2)}\frac{r^2-b^2}{r}$$

(ب) به ازای $r=a$ داریم:

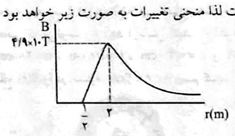
$$B=\frac{\mu_0 i}{2\pi(a^2-b^2)}\frac{a^2-b^2}{a}=\frac{\mu_0 i}{2\pi a}$$

که همان میدان مغناطیسی روی سطح یک سیم دراز است.

$$b=0\Rightarrow B=\frac{\mu_0 i}{2\pi a^2}\frac{r^2-0}{r}=\frac{\mu_0 ir}{2\pi a^2}$$

که میدان درون سیمی به شعاع a است.

(پ) میدان مغناطیسی در $r<b$ صفر است، زیرا در این ناحیه هیچ جریانی محصور نشده است. میدان مغناطیسی در ناحیه $a<r<b$ متناسب با $\frac{r^2-a^2}{r}$ است و در ناحیه $r>b$ متناسب با $\frac{1}{r}$ است لذا منحنی تغییرات به صورت زیر خواهد بود

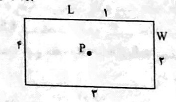


۸۶- نشان دهید که بزرگی میدان مغناطیسی ایجاد شده در مرکز یک حلقهٔ مستطیل شکل به درازای L و پهنای W که حامل جریان i است عبارت است از

$$B=\frac{2\mu_0 i}{\pi}\frac{(L^2+W^2)^{1/2}}{LW}$$

حل: میدان روی عمود منصف سیم حامل جریان به طول L و در فاصله R از آن در مسئله ۱۷ محاسبه شد

$$B=\frac{\mu_0 iL}{2\pi R\sqrt{L^2+4R^2}}$$



برای سیم‌های ۱ و ۳، $L=L$ و $R=\frac{W}{2}$، لذا داریم:

$$B_1 = B_3 = \frac{\mu_0 iL}{2\pi\left(\frac{W}{2}\right)\sqrt{L^2 + 4\left(\frac{W^2}{4}\right)}} = \frac{\mu_0 iL}{\pi w\sqrt{L^2 + W^2}}$$

برای سیم‌های ۲ و ۴، $L \to W$ و $R = \frac{L}{2}$، لذا داریم

$$B_2 = B_4 = \frac{\mu_0 iW}{2\pi\left(\frac{L}{2}\right)\sqrt{W^2 + 4\left(\frac{L^2}{4}\right)}} = \frac{\mu_0 iW}{\pi L\sqrt{W^2 + L^2}}$$

با استفاده از قاعده دست راست درمی‌یابیم میدان حاصل از هر چهار ضلع هم جهت هستند لذا میدان کل در مرکز مستطیل چنین خواهد شد

$$B = 2\frac{\mu_0 iL}{\pi W\sqrt{L^2 + W^2}} + \frac{\mu_0 iW}{\pi L\sqrt{W^2 + L^2}}$$

$$= \frac{2\mu_0 i}{\pi\sqrt{W^2 + L^2}}\left(\frac{L}{W} + \frac{W}{L}\right) = \frac{2\mu_0 i}{\pi}\frac{\sqrt{L^2 + W^2}}{LW}$$

۸۷- شکل ۲۵-۸۷ مقطع یک کابل هم محور رسانای دراز را نشان می‌دهد که شعاع‌های آن (a,b,c) است. جریان‌های مساوی ولی در خلاف جهت i به طور یکنواخت در دو رسانا توزیع شده‌اند. عبارت‌هایی برای $B(r)$ با فاصلهٔ شعاعی r در گستره‌های (الف) $r<c$، (ب) $c<r<b$، (پ) $b<r<a$ و (ت) $r>a$، به دست آورید. (ث) این عبارت‌ها را در تمام موارد خاص که می‌تواند رخ دهد آزمایش کنید. (ج) فرض کنید که $a = 2/0\,cm$، $b = 1/8\,cm$، $c = 0/40\,cm$ و $i = 120\,A$ باشد، تابع $B(r)$ را در گسترهٔ $0 < r < 3cm$ رسم کنید.

شکل ۲۵-۸۷ مسئلهٔ ۸۷

حل: (الف) حلقهٔ آمپری به شعاع $r<c$ در نظر می‌گیریم و قانون آمپر رابه کار می‌بندیم

$$\oint \vec{B}_1 \cdot \vec{ds} = \mu_0 i_{inc} \Rightarrow B_1(2\pi r) = \mu_0 \frac{i}{\pi c^2}\pi r^2$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 ir}{2\pi c^2}$$

(ب) $c<r<b$

$$\oint \vec{B}_2 \cdot \vec{ds} = \mu_0 i_{inc} \Rightarrow B_2(2\pi r) = \mu_0 i$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi r^2}$$

(پ) $b<r<a$

$$\oint \vec{B}_3 \cdot \vec{ds} = \mu_0 i_{inc} \Rightarrow B_3(2\pi r) = \mu_0 (i - i')$$

که $i' = \frac{i}{\pi(a^2 - b^2)}\pi(r^2 - b^2)$ لذا داریم:

$$B_3 = \frac{\mu_0 i}{2\pi r^2}\left(\frac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2}\right)$$

(ت) $r>a$

$$\oint \vec{B}_4 \cdot \vec{ds} = \mu_0 i_{inc} \Rightarrow \mu_0(i - i) = 0 \Rightarrow B_4 = 0$$

(ث) حالت‌های ویژه قسمت (الف) چنین می‌شود:

$$r = 0 \Rightarrow B_1 = 0$$

$$r = c \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi c}$$

حالت‌های ویژه قسمت (ب) چنین می‌شود:

$$r = c \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi c}$$

$$r = b \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi c}$$

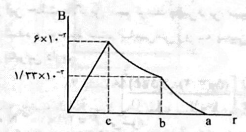
حالت‌های ویژه قسمت (پ) چنین می‌شود:

$$r = b \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi c}$$

$$r = a \Rightarrow B = 0$$

همان طور که مشاهده می‌کنیم حالت‌های مرزی بر هم منطبق می‌شوند.

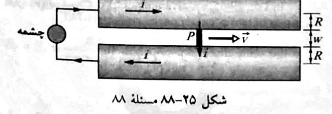
(ج)



۸۸- شکل ۲۵-۸۸ طرحوار آرمانی شدهٔ یک تفنگ ریلی است. پرتابهٔ P بین دو ریل پهن با مقطع دایره‌ای قرار دارد؛ یک چشمهٔ جریان در ریل‌ها و پرتابهٔ (رسانا) جریانی می‌فرستد (از فیوز استفاده نشده است). (الف) فرض کنیم w فاصلهٔ بین ریل‌ها، R شعاع هر ریل و i جریان است. نشان دهید که نیروی وارد بر پرتابه در امتداد ریل‌ها به طرف راست است و تقریباً با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$F = \frac{i^2\mu_0}{2\pi}\ln\frac{w + R}{R}$$

(ب) اگر پرتابه از انتهای چپ ریل‌ها از حالت سکون شروع کرده باشد، تندی v را که به طرف راست پرتاب می‌شود به دست آورید. فرض کنید که $i = 45kA$، $w = 12mm$، $R = 6/7\,cm$، $L = 4/0\,m$ و جرم پرتابه $10g$ است.



شکل ۲۵-۸۸ مسئلهٔ ۸۸

حل: (الف) جهت میدان ناشی از دو ریل روی پرتابهٔ P به سمت داخل صفحه است. نیرویی که ریل بالایی به پرتاب وارد می‌کند را حساب می‌کنیم

$$dF = ibd\ell \Rightarrow dF = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi y}dy$$

$$F = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi}\int_R^{R+W}\frac{dy}{y} = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi}\ln\frac{R + W}{W}$$

با استفاده از قاعده دست راست، جهت نیرو به سمت راست است.

(ب) $F = \frac{(4\pi\times10^{-7})(45\times10^3)^2}{2\pi}\ell n\frac{96/7 + 1/2}{(6/7)}6672/6\,N$

$$F = ma \Rightarrow 6672/6 = (10\times10^{-3})a \Rightarrow a = 6/67\times10^5\ m/s^2$$

$$v^2 - v_0^2 = 2aL \Rightarrow v = \sqrt{2aL}$$

$$v = \sqrt{2(6/67\times10^5)(4)} = 2/31\times10^3\ m/s$$

۸۹- یک حلقهٔ مربع شکل از سیم به ضلع a حامل جریان i است. نشان دهید که در مرکز حلقه، بزرگی میدان مغناطیسی ایجاد شده توسط جریان عبارت است از:

$$B = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 i}{\pi a}$$

حل: مرکز مربع روی عمود منصف چهار ضلع آن قرار دارد و میدان روی عمود منصف سیم حامل جریان به طول L و در فاصله R از آن در مسئله ۱۷ محاسبه شد که از رابطه زیر به دست می‌آید

$$B = \frac{\mu_0 iL}{2\pi\sqrt{L^2 + 4R^2}}$$

در اینجا $R = a/2$ و $L = a$ است در نتیجه میدان مغناطیسی حاصل از یک ضلع مربع در مرکز چنین است

$$B_1 = \frac{\mu_0 ia}{2\pi\left(\frac{a}{2}\right)\sqrt{a^2 + 4\left(\frac{a^2}{4}\right)}} = \frac{\mu_0 ia}{\pi a\sqrt{2}}$$

با استفاده از قاعده دست راست میدان حاصل از اضلاع مربع در مرکز هم جهت هستند از میدان مغناطیس کل در مرکز مربع برابر است با

$$B = 4B_1 = \frac{4\mu_0 ia}{\pi a\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 i}{\pi a}$$

۹۰- در شکل ۲۵-۷۱، آرایشی به نام پیچهٔ هلمهولتز شامل دو پیچهٔ هم محور دایره‌ای، هر یک با N دور سیم به شعاع R و به فاصلهٔ s از یکدیگر نشان داده شده است. این دو پیچه حامل جریان‌های مساوی i در جهت یکسان هستند. (الف) نشان دهید که مشتق اول بزرگی میدان مغناطیسی خالص پیچه‌ها (dB/dx) در نقطهٔ وسط P بدون توجه به مقدار s صفر است. چرا انتظار دارید که این امر با توجه به تقارن نیز درست باشد؟ (ب) نشان دهید که مشتق دوم (d^2B/dx^2) نیز در P صفر است، مشروط بر اینکه $s = R$ باشد. این به دلیل یکنواختی B در نزدیکی P برای این فاصلهٔ خاص پیچه است.

حل: (الف) بزرگی میدان مغناطیسی روی محور یک پیچهٔ N دو و شعاع R حامل جریان i به فاصله Z از مرکز پیچه، طبق رابطه زیر داده می‌شود.

$$B = \frac{N\mu_0 iR^2}{2(R^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

در اینجا از قاعده دست راست در می‌یابیم که در ناحیه میان پیچه‌ها میدان حاصل از آنها در یک جهت است. مبدأ را روی مرکز حلقه سمت چپ انتخاب می‌کنیم و برای محاسبه میدان پیچه سمت چپ $Z = x$ و برای پیچهٔ سمت راست $Z = s - x$ است. در نتیجه میدان مغناطیسی کل در نقطه میان دو پیچه برابر است با:

$$B = \frac{n\mu_0 iR^2}{2}\left[\frac{1}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(R^2 + x^2 - 2sx + s^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

و مشتق میدان نسبت به x برابر است با:

$$\frac{dB}{dx} = \frac{N\mu_0 iR^2}{2}\left[-\frac{3}{(R^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3}{(R^2 + x^2 - 2sx + s^2)^{\frac{5}{2}}}\right]$$

وقتی این را برای نقطهٔ میانی، $x = S/2$ محاسبه کنیم، خواهیم داشت:

$$\left.\frac{dB}{dx}\right|_{x=\frac{s}{2}} = 0$$

(ب) برای مشتق دوم داریم:

$$\frac{d^2B}{dx^2} = \frac{N\mu_0 iR^2}{2}\left[-\frac{3}{(R^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{15x^2}{(R^2 + x^2)^{\frac{7}{2}}}\right.$$

$$\left.-\frac{3}{(R^2 + x^2 - 2sx + s^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{15(x - s)^2}{(R^2 + x^2 - 2sx + s^2)^{\frac{7}{2}}}\right]$$

که در $x = S/2$ خواهیم داشت:

$$\left.\frac{d^2B}{dx^2}\right|_{x=\frac{s}{2}} = 3N\mu_0 iR^2\frac{S^2 - R^2}{(R^2 + S^2/4)^{\frac{7}{2}}}$$

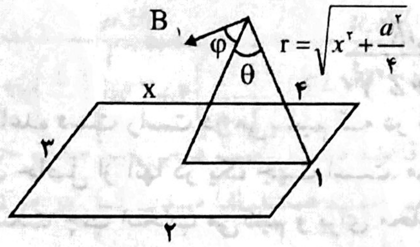
۹۱- SSM یک حلقهٔ مربع شکل سیمی به ضلع a حامل جریان i است. نشان دهید که بزرگی میدان مغناطیسی ایجاد شده در نقطهٔ واقع بر محور مرکزی عمود بر حلقه و به فاصلهٔ x از مرکز آن عبارت است از

$$B(x) = \frac{4\mu_0 ia^2}{\pi(4x^2 + a^2)(4x^2 + 2a^2)^{1/2}}$$

ثابت کنید که این نتیجه با نتیجه به دست آمده در مسئلهٔ ۸۷ سازگار است.

حل: در مسئله ۱۷ نشان داده شده که میدان روی عمود منصف سیم دراز حامل جریان به طول L و در فاصله R از آن از رابطه زیر به دست می‌آید

$$B=\frac{\mu_0 iL}{2\pi R\sqrt{L^2+4R^2}}$$



میدان حاصل از ضلع ۱ را در نظر بگیریم داریم

$$B_1=\frac{\mu_0 iL}{2\pi r\sqrt{a^2+4r^2}}$$

میدان ناشی از سایر اضلاع از نظر بزرگی همین مقدار است. مؤلفه‌های افقی آنها یکدیگر را خنثی می‌کنند و فقط در راستای محور z میدان خالص داریم

$$B_z=4B_1\cos\varphi=4B_1\sin\theta=4\frac{\mu_0 a}{2\pi r\sqrt{a^2+4r^2}}\frac{a/2}{r}$$

$$=\frac{\mu_0 ia^2}{4\pi r^2\sqrt{a^2+4r^2}}$$

با قرار دادن مقدار r نتیجه نهایی به دست می‌آید

$$B=\frac{\mu_0 ia^2}{4\pi\left(x^2+\frac{a^2}{4}\right)^2\sqrt{a^2+4\left(x^2+\frac{a^2}{4}\right)}}$$

$$=\frac{\mu_0 ia^2}{\pi\left(4x^2+a^2\right)^2\sqrt{4x^2+2a^2}}$$

چنانچه $x=0$ را قرار دهیم نتیجه به آمده با نتیجه مسئله ۸۷ سازگار می‌شود

۹۲- نشان دهید که اگر ضخامت چنبره‌ای خیلی کوچکتر از شعاع انحنای آن باشد (چنبره خیلی نازک)، آنگاه معادلهٔ ۲۵-۲۴ در مورد میدان داخل چنبره به معادلهٔ ۲۵-۲۳ برای میدان داخل سیملوله تبدیل می‌شود. توضیح دهید که چرا این نتیجه قابل انتظار است؟

حل: میدان درون چنبره از رابطه زیر به دست می‌آید

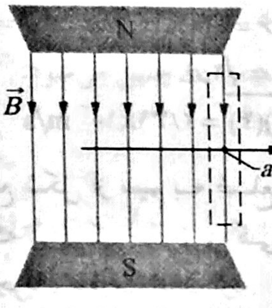
$$B=\frac{\mu_0 iN}{2\pi r}$$

اگر چنبره خیلی نازک باشد آنگاه تفاوت چندانی میان شعاع‌های داخلی و خارجی چنبره نیست و $L=2\pi r$ را می‌توان تقریباً برابر طول چنبره گرفت بنابراین داریم:

$$B=\mu_0 i\left(\frac{L}{N}\right)=\mu_0 in$$

که همان میدان داخل سیملوله است.

۹۳- نشان دهید که میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ در هنگام حرکت عمود بر $\vec{B}$، یعنی در امتداد پیکان افقی در شکل ۲۹-۸۹، نمی‌تواند به طور ناگهانی صفر شود (همان‌طور که در نبود خط‌های میدان در طرف راست نقطهٔ a در شکل به نظر می‌رسد). (*راهنمایی:* قانون آمپر را در مسیر مستطیل شکل نشان داده شده با خط‌چین به کار برید.) در آهنرباهای واقعی «اثر کناره‌ها» خط‌های میدان مغناطیسی همیشه رخ می‌دهد، که معنای آن این است که $\vec{B}$ به طور تدریجی به صفر می‌رسد. خط‌های میدان را در شکل اصلاح کنید تا وضعیت واقعی‌تری را نشان بدهند.



شکل ۲۵-۸۹ مسئلهٔ ۹۳

حل: در حلقه آمپری که با خط‌چین نشان داده شده است جریان خالص برابر صفر است و بنابراین $\oint\vec{B}\cdot\vec{ds}=0$ می‌شود. حال این انتگرال را درامتداد اضلاع حلقه آمپری محاسبه می‌کنیم. چون در ضلع‌های بالایی و پایینی حلقه، میدان مغناطیسی $\vec{B}$ بر $\vec{ds}$ عمود است و سهم این دو قسمت در انتگرال صفر است. فرض کرده‌ایم که در بیرون از آهنربا میدان صفر است و بنابراین ضلع سمت راست حلقه آمپر نیز در انتگرال بالا سهمی ندارد. پس اگر ℓ طول ضلع سمت چپ باشد انتگرال بالا به صورت $\oint\vec{B}\cdot\vec{ds}=B\ell$ در می‌آید. از طرفی طبق قانون آمپر $\oint\vec{B}\cdot\vec{ds}=0$ می‌شود. با توجه به اینکه نه B نه ℓ برابر صفر نیستند، بنابراین نتیجه بالا در تناقض با قانون آمپر است. تنها توجیه این است که میدان بیرون آهنربا برابر صفر نباشد. پس، آنچه که برای خطوط میدان آهنربا نشان می‌دهند، صحیح نیست. در واقع خطوط میدان به سمت بیرون شکم می‌دهند و چگالی آنها به تدریج و نه بی‌درنگ کاهش می‌یابد.